1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°13 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Soient $A=\left\{\frac{5n+8}{8n-1}/n\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{\frac{2n+4}{2n-1}/n\in\mathbb{N}\right\}$

1) Est ce que : $\frac{17}{3}\in A$? $\frac{43}{25}\in B$? $\frac{42}{37}\in B$?

2)Montrer que $\frac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B.

Exercice2 : Soient les ensembles : $E=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/\tan x=\sqrt{3}:x\in\mathbb{R}\right\}$

$F=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/x=\frac{\pi}{6}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$

$G=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/x=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$

$S=\left\{\frac{-5\pi}{6};\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right\}$

1)Vérifier que : $S\subseteq E$ et $E\subseteq S$ et que $E=S$ et $E=G$

2)Vérifier que : $\frac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E et que $E\neq F$

Exercice3 : Soient a, b, c, d, e, des nombres distincts, et : A = {a, b, d, e}, B = {b, c, d}.
Les ensembles suivants sont-ils des sous-ensembles de A × B.
P1 = {(a, b), (b, a), (a, c), (b, c)},
P2 = {(a, c), (b, c), (c, c)}
P3 = {(d, b), (e, b), (d, d), (e, d)}.

Exercice4 : Soient les deux applications suivantes : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z} \\ n\mapsto(-1)^n\times n\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z} \\ n\mapsto\begin{cases} n.\text{si}.n.pair \\ -n.si.n.impair\end{cases}\end{array}$

Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})\ (f(n)=g(n))$

Exercice5 : 1) Soit f l'application de l'ensemble {1,2,3,4} dans lui-même définie par :
$f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque : $A=\{2\}$, $A=\{1,2\}$, $A=\{3\}$.
2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque : $A=\{1\}$, $A=[1,2]$.

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\frac{x+1}{x+2}\end{array}$

1) Montrer que f est non surjective

2) On définit l'application g : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\} \\ x\mapsto f(x)=\frac{x+1}{x-2}\end{array}$

a) Montrer que g est surjective

3) En déduire que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque. g^{-1}

Exercice7 : 1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-2} \end{array}$ Montrer que f est injective

2) $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+4 \end{array}$ g est-elle injective ?

3) $\begin{array}{l} h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q} \\ n\mapsto 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n} \end{array}$

a) Déterminer les images des entiers 1, 2, 3

b) Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

c) En déduire que h est injective.

Exercice8 : On considère l'application $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}^*$

Définie par : $f(n)=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1) Déterminer $f(1)$ et $f(2)$

2) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall m\in\mathbb{N}$ $n\succ m\Rightarrow f(n)\succ f(m)$

b) En déduire que f est injective.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{N}^*$: l'équation : $f(n)=\dfrac{3}{2}$

b) f est-elle surjective ?

4) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $f(n)\geq\sqrt{n}$

Exercice9 : 1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-2} \end{array}$

a) f est-elle surjective de $\mathbb{R}$/ {2} vers $\mathbb{R}$.

b) Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

a) Montrer que la fonction g est surjective.

b) g est-elle injective ?

3) $\begin{array}{l} h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}\cap[1;+\infty[\\ n\mapsto 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n} \end{array}$ h est-elle surjective ?

Exercice10 : $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

1) Montrer que f est une bijection de $[1;+\infty[$ Vers $[2;+\infty[$

2) Soit y un élément de $[2;+\infty[$

Déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1;+\infty[$ tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de $[2;+\infty[$ à l'élément unique x de $[1;+\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection $\boldsymbol{f}$

Et se note : f^{-1}

Exercice11 : Déterminer la fonction réciproque de la fonction $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

Exercice12 : Soit la fonction g définie par : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}\end{array}$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice13 : Soient : $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Les applications définies par : $\forall k\in\mathbb{N}$

$f(k)=2k$ et $g(k)=\begin{cases}\dfrac{k}{2} & si\ \ k\ est\ pair \\ \dfrac{k-1}{2} & si\ \ k\ est\ impair\end{cases}$

1) étudier l'injectivité et la subjectivité et la bijectivité de f et g

2) Préciser les applications : $g\circ f$ et $f\circ g$ et en déduire leur : injectivité ; subjectivité et bijectivité.

Exercice14 : Soit la fonction f définie par : $\begin{array}{l} f:[0;1]\to[0;2] \\ t\mapsto 2t\end{array}$

Montrer que f est une bijection

Solution : Montrons d'abord que f est injective. Si f (x) = f (y), alors 2x = 2y ce qui implique x = y.
Montrons maintenant que f est surjective.
Soit y ∈ [0, 2]. Posons x = y/2,
Alors x ∈ [0, 1] et f (x) = 2x = y.

Exercice15 : Soit $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x^2-x\end{array}$

1) Montrer que $\forall x\in[-1;1]$ $f(x)\in\left[\dfrac{-1}{8};3\right]$

2) Montrer que : $\forall y\in\left[\dfrac{-1}{8};3\right]$ $\exists x\in[-1;1]$ / $(f(x)=y)$

Exercice16 : Soit : $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}\end{array}$

1) Déterminer les couples (x, y) qui vérifient $h((x, y)) = 1$

2) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M(x, y)$ qui vérifient : $h((x, y)) = 1$.

Exercice17 : Soit g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto \dfrac{3}{1+x^2}$ Déterminer $f^{-1}([1;2])$

Exercice18 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 3|1-x^2|+x\end{array}$

Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

Exercice19 : Soit l'application : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-1}\end{array}$

1) g est-elle bijective ? 2) A partir de g, définir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice20 : 1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall m\in\mathbb{Z})\ (E(m+x)=m+E(x))$.

2) Vérifier par un contre-exemple que : $E(x+y)\neq E(x)+E(y)$

3) Soit l'application $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto E(3x+1)+x\end{array}$

a) Vérifier que h n'est pas injective.

b) Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{3}\right[$.

c) Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?

Exercice21 : Soit l'application f : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x^2-2x+3}\end{array}$

1)Vérifier que f est une 'application de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(2-x)=f(x)$

b) f est-elle injective ?

3) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\geq\sqrt{2}$ b) f est-elle surjective ?

4) On considère l'application g : $\begin{array}{l}:[1;+\infty[\to\left[\sqrt{2};+\infty\right[\\ x\mapsto\sqrt{x^2-2x+3}\end{array}$

a) Montrer que g est une bijection

b) Déterminer la bijection réciproque de g .

Exercice22 : Soient les deux applications : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{1}{x^2}\end{array}$ et $\begin{array}{l}g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{x}{x-1}\end{array}$

1)Déterminer $f\ (g\ (3))$; $f\ (g\ (-1))$; $g\ (f\ (3))$

2) Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

3) Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4) Déterminer les application fog et gof.

Exercice23 : Soient l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}$

1)a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) f est-elle surjective ?

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(1-x)=f(x)$

b) f est-elle injective ?

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et h la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

a) Montrer que g : est une bijection de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ vers un l'intervalle J dont on déterminera et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

b) Montrer que : $h=g\circ k$ avec : $\begin{array}{l}k:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x\mapsto 1-x\end{array}$

et en déduire que : $h=g\circ k$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}

4)a) Montrer que : $\forall x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\ x-\frac{1}{2}\leq g(x)\leq x+\frac{1}{2}$

Et donner une interprétation géométrique de ce résultat

b) En déduire que : $\forall x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$; $\frac{1}{2}-x\leq h(x)\leq\frac{3}{2}-x$

Et donner une interprétation géométrique de ce résultat

Exercice24 : Soit la fonction f définie par : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad \overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$

1)Montrer que chaque élément de $\mathbb{R}$ à une image.
2) l'implication suivante est-elle vraie :(P) $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$.

3)Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) \in \left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

4) Montrer que $(\forall y \in \left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ $(\exists x \in \mathbb{R})(f(x) = y)$

Exercice25 : Soit E un ensemble non vide
$P(E)$ L'ensemble de ses parties, et soit A une partie non vide de E.

Soit l'application f : $P(E) \to P(E) \times P(E)$

$X \mapsto (A \cup X; A \cap \overline{X})$

1) Montrer que f est injective 2) f est-elle surjective ?

Exercice26 : Soit E un ensemble et
P(E) l'ensemble de ses parties, Et soient A ; B des parties non vides de E Soit l'application f :

$P(E) \to P(E) \times P(E)$

$X \mapsto (X \cap A; X \cap B)$

1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?
3) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$

Exercice27 : Soit E un ensemble et soit f : $P(E) \to \mathbb{R}$.

On suppose que pour toutes parties A et B disjointes de E, on a : f(A ∪ B) = f(A) + f(B).
1) Montrer que f(∅) = 0.
2) Montrer que pour toutes parties A et B de E telles que :
A ⊆ B, on a f(B\A) = f(B) − f(A).
2) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :f(A ∪ B) = f(A) + f(B) − f(A ∩ B)

Exercice28 : Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y.
Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.
1) Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2) Montrer que toute section de f est injective.
Une application r, de Y dans X, telle que :$r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.
3)Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4) Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5) Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6) En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s$ (= f^{-1} par conséquent).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien