

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°13 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Soient $A = \left\{ \frac{5n+8}{8n-1} / n \in \mathbb{N} \right\}$ et $B = \left\{ \frac{2n+4}{2n-1} / n \in \mathbb{N} \right\}$

1) Est ce que : $\frac{17}{3} \in A$? $\frac{43}{25} \in B$? $\frac{42}{37} \in B$?

2) Montrer que $\frac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B.

Exercice2 : Soient les ensembles : $E = \{x \in]-\pi; 2\pi[/ \tan x = \sqrt{3} : x \in \mathbb{R}\}$

$$F = \left\{ x \in]-\pi; 2\pi[/ x = \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$G = \left\{ x \in]-\pi; 2\pi[/ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{6}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

1) Vérifier que : $S \subseteq E$ et $E \subseteq S$ et que $E=S$ et $E=G$

2) Vérifier que : $\frac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E et que $E \neq F$

Exercice3 : Soient a, b, c, d, e, des nombres distincts, et : $A = \{a, b, d, e\}$, $B = \{b, c, d\}$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-ensembles de $A \times B$.

$$P1 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\},$$

$$P2 = \{(a, c), (b, c), (c, c)\}$$

$$P3 = \{(d, b), (e, b), (d, d), (e, d)\}.$$

Exercice4 : Soient les deux applications suivantes : $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto (-1)^n \times n$ et $n \mapsto \begin{cases} n. \text{ si } n. \text{ pair} \\ -n. \text{ si } n. \text{ impair} \end{cases}$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) (f(n) = g(n))$

Exercice5 : 1) Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
 $f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque : $A = \{2\}, A = \{1,2\}, A = \{3\}$.

2) Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$

Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque : $A = \{1\}, A = [1,2]$.

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice6 : Soit l'application :

$$x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$$

1) Montrer que f est non surjective

$$: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

2) On définit l'application g :

$$x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

a) Montrer que g est surjective

3) En déduire que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque. g^{-1}

Exercice7 : 1) $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$ Montrer que f est injective

2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 4$ g est-elle injective ?

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$
 3) $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- Déterminer les images des entiers 1, 2, 3
- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$
- En déduire que h est injective.

Exercice8 : On considère l'application $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$

Définie par : $f(n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

- Déterminer $f(1)$ et $f(2)$
- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall m \in \mathbb{N}$ $n > m \Rightarrow f(n) > f(m)$
- b) En déduire que f est injective.
- a) Résoudre dans \mathbb{N}^* : l'équation : $f(n) = \frac{3}{2}$

b) f est-elle surjective ?

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $f(n) \geq \sqrt{n}$

Exercice9 : 1) $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

- f est-elle surjective de $\mathbb{R} - \{2\}$ vers \mathbb{R} .
- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

- Montrer que la fonction g est surjective.
- g est-elle injective ?

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$
 3) $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ h est-elle surjective ?

Exercice10 : $f : [1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

- Montrer que f est une bijection de $[1; +\infty[$ Vers $[2; +\infty[$
- Soit y un élément de $[2; +\infty[$

Déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1; +\infty[$ tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de $[2; +\infty[$ à l'élément unique x de $[1; +\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection f

Et se note : f^{-1}

Exercice11 : Déterminer la fonction réciproque de la fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

PROF: ATMANI NAJIB

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice12 : Soit la fonction g définie par : $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice13 : Soient : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Les applications définies par : $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

- 1) étudier l'injectivité et la surjectivité et la bijectivité de f et g
- 2) Préciser les applications : $g \circ f$ et $f \circ g$ et en déduire leur : injectivité ; surjectivité et bijectivité.

Exercice14 : Soit la fonction f définie par : $f : [0;1] \rightarrow [0;2]$
 $t \mapsto 2t$

Montrer que f est une bijection

Solution : Montrons d'abord que f est injective. Si $f(x) = f(y)$, alors $2x = 2y$ ce qui implique $x = y$.
Montrons maintenant que f est surjective.

Soit $y \in [0, 2]$. Posons $x = y/2$,
Alors $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 2x = y$.

Exercice15 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x^2 - x$

- 1) Montrer que $\forall x \in [-1;1] \quad f(x) \in \left[-\frac{1}{8}; 3\right]$
- 2) Montrer que : $\forall y \in \left[-\frac{1}{8}; 3\right] \exists x \in [-1;1] / (f(x) = y)$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice16 : Soit : $(x; y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$

- 1) Déterminer les couples (x, y) qui vérifient $h((x, y)) = 1$
- 2) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M(x, y)$ qui vérifient : $h((x, y)) = 1$.

Exercice17 : Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3}{1+x^2}$ Déterminer $f^{-1}([1;2])$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice18 : Soit l'application : $x \mapsto 3|1-x^2| + x$

Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice19 : Soit l'application : $x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$

- 1) g est-elle bijective ?
- 2) A partir de g , définir une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Exercice20 : 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall m \in \mathbb{Z}) (E(m+x) = m + E(x))$.

2) Vérifier par un contre-exemple que : $E(x+y) \neq E(x) + E(y)$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

3) Soit l'application $x \mapsto E(3x+1) + x$

- a) Vérifier que h n'est pas injective.
 b) Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.
 c) Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?

Exercice21 : Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

- 1) Vérifier que f est une application de \mathbb{R} vers \mathbb{R}
 2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} f(2-x) = f(x)$
 b) f est-elle injective ?
 3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq \sqrt{2}$ b) f est-elle surjective ?
 4) On considère l'application $g : [1; +\infty[\rightarrow [\sqrt{2}; +\infty[$
 $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

- a) Montrer que g est une bijection
 b) Déterminer la bijection réciproque de g .

Exercice22 : Soient les deux applications : $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{x}{x-1}$

- 1) Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$; $g(f(3))$
 2) Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.
 3) Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.
 4) Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice23 : Soient l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$

- 1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) f est-elle surjective ?
 2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} f(1-x) = f(x)$
 b) f est-elle injective ?
 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et h la restriction de f sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

a) Montrer que g : est une bijection de $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ vers un l'intervalle J dont on déterminera et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

b) Montrer que : $h = g \circ k$ avec : $k : \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$
 $x \mapsto 1-x$

et en déduire que : $h = g \circ k$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}

4) a) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[x - \frac{1}{2} \leq g(x) \leq x + \frac{1}{2}$

Et donner une interprétation géométrique de ce résultat

b) En déduire que : $\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] ; \frac{1}{2} - x \leq h(x) \leq \frac{3}{2} - x$

Et donner une interprétation géométrique de ce résultat

Exercice24 : Soit la fonction f définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \quad \bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

- 1) Montrer que chaque élément de \mathbb{R} à une image.
- 2) l'implication suivante est-elle vraie : $(P) (a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$.
- 3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]$
- 4) Montrer que $(\forall y \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]) (\exists x \in \mathbb{R})(f(x) = y)$

Exercice25 : Soit E un ensemble non vide

$P(E)$ L'ensemble de ses parties, et soit A une partie non vide de E .

$$P(E) \rightarrow P(E) \times P(E)$$

Soit l'application $f :$

$$X \mapsto (A \cup X; A \cap \bar{X})$$

- 1) Montrer que f est injective
- 2) f est-elle surjective ?

Exercice26 : Soit E un ensemble et

$P(E)$ l'ensemble de ses parties, Et soient $A ; B$ des parties non vides de E Soit l'application $f :$

$$P(E) \rightarrow P(E) \times P(E)$$

$$X \mapsto (X \cap A; X \cap B)$$

- 1) f est-elle injective ?
- 2) f est-elle surjective ?
- 3) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$

Exercice27 : Soit E un ensemble et soit $f : P(E) \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que pour toutes parties A et B disjointes de E , on a : $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

- 1) Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
- 2) Montrer que pour toutes parties A et B de E telles que :
 $A \subseteq B$, on a $f(B \setminus A) = f(B) - f(A)$.
- 2) Montrer que pour toutes parties A et B de E , on a : $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

Exercice28 : Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y .

Une application s , de Y dans X , telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f .

- 1) Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
 - 2) Montrer que toute section de f est injective.
- Une application r , de Y dans X , telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f .
- 3) Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
 - 4) Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
 - 5) Montrer que toute rétraction de f est surjective.
 - 6) En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r , alors f est bijective et l'on a : $r = s (= f^{-1}$ par conséquent).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

