1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°12 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Fonction injective ; surjective ; bijection

Pour aller plus loin

(La correction voir http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Soient E un ensemble et f une application de E dans E telle que : $f = f \circ f$
Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = Id_E$

Exercice2 : f Une application de E dans F
Montrer que : Si f admet une application réciproque, celle-ci est n´nécessairement unique.

Exercice3 : Soit f une application de E dans E telle que : $f \circ f \circ f = f$
Montrer que : f est injective si et seulement si f est surjective

Exercice4 : Soient E ; F ; G trois ensembles et f une application de E dans F et g une application de E dans G et soit l'application : $h : \begin{array}{l} E \to F \times G \\ x \mapsto h(x) = (f(x); g(x)) \end{array}$

1) Montrer que si f ou g sont injectives, alors h l'est aussi.
2) On suppose que si f et g sont surjectives, h est-elle n´nécessairement surjective ?

Exercice5 : Soient E ; F deux ensembles et f une application de E dans F et g une application de F dans E telles que : $f \circ g \circ f \circ g$ est injective et $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective
Montrer que : f et g sont bijectives

Exercice6 : Soient X ; Y deux ensembles et f une application de X dans Y
1)Montrer que : f est injective si et seulement si pour tous : $g : Z \to X$ et tous : $h : Z \to X$ on a : $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$
2)Montrer que : f est surjective si et seulement si pour tous : $g : Y \to Z$ et tous : $h : Y \to Z$ on a : $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

Exercice7 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on posant : $f(n) = f_n(n) + 1$
Montrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que : $f = f_p$

Exercice8 : Soit un ensemble E
Montrer qu'il n'existe pas de surjection E dans P(E).

Exercice9 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \le x \le y\}$ Soit $f : D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :
$f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
1) Représenter D dans le plan.
2) a) Montrer que si deux couples de réels : (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient :
$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ et $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$
Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).
b) Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2) a).
3) Est-ce que f est surjective ?

Exercice10 : Soit l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$ et l'application : $g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$ Où $E(x)$ désigne la partie entière de x 1) Les fonctions sont-elles injectives, surjective ?
2) Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice11 : On considère les applications : $f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$ et $g: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ p \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad p=0 \\ p-1 & si \quad p \geq 0 \end{cases} \end{array}$

1)Étudier l'injectivité, la subjectivité, la bijectivité de f et g

2) Expliciter g ∘ f et f ∘ g.

Exercice12 : Soit f une application de E vers E telle que : $f(f(E)) = E$

Montrer que f est surjective.

Exercice13 : On considère l'application $f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$

1) Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?

2) Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Exercice14 : Soit l'ensemble : $D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / -y \leq x \leq y\right\}$ et soit l'application f :

$\begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto \left(x^2+y^2 \ ; 2xy\right) \end{array}$ 1) Montrer que f est injective 2) f est-elle surjective ?

Exercice15 : Soit E un ensemble et P(E) l'ensemble de ses parties, Et soient A ; B des parties de E Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E) \to P(A) \times P(B) \\ X \mapsto (A \cap X ; B \cap X) \end{array}$

1)Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$

2)Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$

3)Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Indication :

1) Pour le sens direct, raisonner par contraposée. Pour le sens réciproque, remarquer que : X =(X∩A) ∪(X∩B).

2) Pour le sens direct, prendre x dans A et regarder l'antécédent de ({x}, ∅). Pour le sens réciproque, prendre A′⊂A et B′⊂B, et poser X=A′∪B′.

On a tout fait avant !

Exercice16 : Soit $f : E \to F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$ Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes (i) f est injective (ii) f est surjective (iii) f est bijective

Exercice17 : Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Indication : Considérer la partie $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.

Exercice18 : Pour un entier $n \in \mathbb{N}$; on désigne par : I_n L'ensemble $I_n = \{1;2;3;...;n\}$

1) On suppose : $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f : I_2 \to I_n$?

2) A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice19 : Soit $f : E \to F$ une application et A⊂E ; B⊂F

Montrer que : $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Montrer que : $A \subset f^{-1}(f(A))$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien