1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°12 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS
Fonction injective ; surjective ; bijection
Pour aller plus loin

Exercice1 : Soient E un ensemble et f une application de E dans E telle que : $f = f \circ f$

Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = Id_E$

Solution : Si f est injective. Comme $\forall x \in E$, $f(x) = f(f(x))$.

On déduit que : $f = Id_E$

Si f est surjective, pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que : $f(y) = x$ et $f(x) = f \circ f(y) = f(y) = x$

D'où : $f = Id_E$

Exercice2 : f Une application de E dans F

Montrer que : Si f admet une application réciproque, celle-ci est n´nécessairement unique.

Solution : Soient g_1 et g_2 sont deux applications réciproques de f

Montrons qu'elles sont ´égales.

Comme g_1 et g_2 ont les mêmes ensembles de d´épart et d'arrivée

Il s'agit de montrer que l'on a, pour tout y dans F : $g_1(y) = g_2(y)$

Fixons donc $y \in F$.

On a, par d´définition : $g_1 \circ f = Id_E$ et $f \circ g_2 = Id_F$.

$(f \circ g_2)(y) = y$ Donc : $f(g_2(y)) = y$

En appliquant g_1, il vient : $f(g_2(y)) = y$

$g_1(y) = g_1(f(g_2(y))) = (g_1 \circ f)(g_2(y))$

$g_1(y) = Id_E(g_2(y)) = g_2(y)$

On déduit que : $g_1(y) = g_2(y)$

Exercice3 : Soit f une application de E dans E telle que : $f \circ f \circ f = f$

Montrer que : f est injective si et seulement si f est surjective

Solution : $\Rightarrow$) On suppose que : f est injective et montrons que : f est surjective ???

Soit $y \in E$; On a : $f \circ f \circ f = f$ donc : ; $(f \circ f \circ f)(y) = f(y)$

Donc : $f((f \circ f)(y)) = f(y)$

Puisque : f est injective alors : $(f \circ f)(y) = y$

Donc : $f(f(y)) = y$

Donc :il existe $x \in E$; $f(x) = y$

Il suffit de prendre : $x = f(y)$

Donc : f est surjective

$\Rightarrow$) On suppose que : f est surjective et montrons que : f est injective ???

Soient $x \in E$ et $x' \in E$ tels que : $f(x) = f(x')$

Comme : f est surjective il existe $t \in E$ et $t' \in E$ $f(t) = x$ et $f(t') = x'$

$f(x)=f(x')\Rightarrow f(f(t))=f(f(t'))$

$\Rightarrow(f\circ f)(t)=(f\circ f)(t')\Rightarrow f((f\circ f)(t))=f((f\circ f)(t'))$

$\Rightarrow(f\circ f\circ f)(t)=(f\circ f\circ f)(t')\Rightarrow(f\circ f\circ f)(t)=(f\circ f\circ f)(t')$

Comme : $f\circ f\circ f=f \;\Rightarrow f(t)=f(t')\Rightarrow x=x'$

Donc : f est injective

Donc : on a prouvé que si f est injective ou surjective alors f est bijective

En composant la relation $f\circ f\circ f=f$: par f^{-1}

On obtient : $f\circ f\circ f\circ f^{-1}=f\circ f^{-1}$

C'est-à-dire : $\boxed{f\circ f=Id_E}$ car $f\circ f^{-1}=Id_E$

Exercice4 : Soient E ; F ; G trois ensembles et f une application de E dans F et g une application de E dans G et soit l'application : h : $\begin{array}{l}:E\to F\times G\\ x\mapsto h(x)=(f(x);g(x))\end{array}$

1) Montrer que si f ou g sont injectives, alors h l'est aussi.

2) On suppose que si f et g sont surjectives, h est-elle n´nécessairement surjective ?

Solution :1) On suppose par exemple que : f est injective

Soient $x_1\in E;x_2\in E$ et $x_2\in[0;1]$

$$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow(f(x_1);g(x_1))=(f(x_2);g(x_2))\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)=f(x_2)\\ g(x_1)=g(x_2)\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2$$

2) Si f et g sont surjectives, h n'est pas n´nécessairement surjective

Contre-exemple : Soit E un ensemble contenant 2 éléments a et b : $E=\{a;b\}$ et considérant :

$E=F=G$ et $f=g=Id_E$ surjectives (évident).

On aura alors : $\forall x\in E=\{a;b\}$: $h(x)=(f(x);g(x))=(Id_E(x);Id_E(x))=(x;x)$

On a : $(a;b)\in E\times E$ mais il n'existe pas d'élément $x\in E$ qui vérifie : $h(x)=(a;b)$

Donc h n'est pas nécessairement surjective.

Exercice5 : Soient E ; F deux ensembles et f une application de E dans F et g une application de F dans E telles que : $f\circ g\circ f\circ g$ est injective et $g\circ f\circ g\circ f$ est surjective

Montrer que : f et g sont bijectives

Solution : On a : $g\circ(f\circ g\circ f)$ est surjective donc : g est surjective

et $(f\circ g\circ f)\circ g$ est injective donc : g est injective

Donc : g est bijective

D'autre part : $f\circ g\circ f=g^{-1}\circ(g\circ f\circ g\circ f)$

$=(f\circ g\circ f\circ g)\circ g^{-1}$

Donc : $f\circ g\circ f$ est donc surjective et injective donc bijective

En conclusion, $f\circ g\circ f$ est bijective et g bijective, donc f est bijective

Exercice6 : Soient X ; Y deux ensembles et f une application de X dans Y

1)Montrer que : f est injective si et seulement si pour tous : $g:Z\to X$ et tous : $h:Z\to X$

On a : $f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$

2)Montrer que : f est surjective si et seulement si pour tous : $g:Y\to Z$ et tous : $h:Y\to Z$ on a :

$g\circ f=h\circ f\Rightarrow g=h$

Solution : 1)$\Rightarrow$) On suppose que : f est injective

Soient : $g\,;h$ deux applications de Z dans X telles que : $f\circ g=f\circ h$

Alors : $\forall z\in Z$; $f\left(g(z)\right)=f\left(h(z)\right)$

Puisque : f est injective alors : $\forall z\in Z$: $g(z)=h(z)$

Donc : $g=h$

$\Leftarrow$) Au lieu de montrer que : (pour tous : $g:Z\to X$ et tous : $h:Z\to X$; $f\circ g=f\circ h \Rightarrow g=h$)
$\Rightarrow f$ est injective

On démontre la contraposée : C'est-à-dire : On démontre que :
f n'est pas injective $\Rightarrow$ on peut trouver $g;h$ deux applications de Z dans X telles que :
$g\neq h$ et $f\circ g=f\circ h$

f n'est pas injective $\Rightarrow$ il existent $a\in X;b\in X$ tels que : $f(a)=f(b)$ et $a\neq b$

On définit : $\begin{array}{l} g:Z\to X \\ z\mapsto a\end{array}$ et On définit : $\begin{array}{l} h:Z\to X \\ z\mapsto b\end{array}$ On a : $(g;h)\in\left(A(Z;X)\right)^2$ et $g\neq h$

Soit $z\in Z$: $(f\circ g)(z)=f\left(g(z)\right)=f(a)=f(b)$

$(f\circ h)(z)=f\left(h(z)\right)=f(b)=f(a)$

On donc aussi : $f\circ g=f\circ h$

Donc : on a établi que : par contraposée que : ($\forall(g;h)\in\left(A(E;F)\right)^2$; $f\circ g=f\circ h \Rightarrow g=h$)
$\Rightarrow f$ est injective.

2)$\Rightarrow$) On suppose que : f est surjective

Soient : $g\,;h$ deux applications de Y dans Z telles que : $g\circ f=h\circ f$

Alors : $\forall y\in Y$; $g\left(f(y)\right)=h\left(f(y)\right)$

Soit : $y\in Y$; Puisque : f est surjective alors : $\exists x\in X$: $y=f(x)$

On en déduit : $g(y)=g\circ f(x)=h\circ f(x)=h(y)$

Ce qui prouve : $g=h$

$\Leftarrow$) Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas surjective. Il existe donc un point $y_0\in Y$ qui n'est pas dans : $f(X)$

On considère alors : $Z=\{0;1\}$; g Définit sur Y par : $g(y_0)=1$ et $g(y)=0$ si $y\neq y_0$

h définit sur Y par : $h(y)=0$ $\forall y\in Y$

Alors on a bien : $g\circ f=h\circ f$ (car : $f(x)=y_0$; $\forall x\in X$) et $g\neq h$

Exercice7 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on posant : $f(n)=f_n(n)+1$

Montrer qu'il n'existe aucun $p\in\mathbb{N}$ tel que : $f=f_p$

Solution : On suppose par l'absurde que : $\exists p\in\mathbb{N}$ tel que : $f=f_p$

Donc : $f(p)=f_p(p)+1$ et $f(p)=f_p(p)$

Donc : $f(p)=f(p)+1$

Donc : $0=1$ absurde ; Par suite : il n'existe aucun $p\in\mathbb{N}$ tel que : $f=f_p$

Exercice8 : Soit un ensemble E

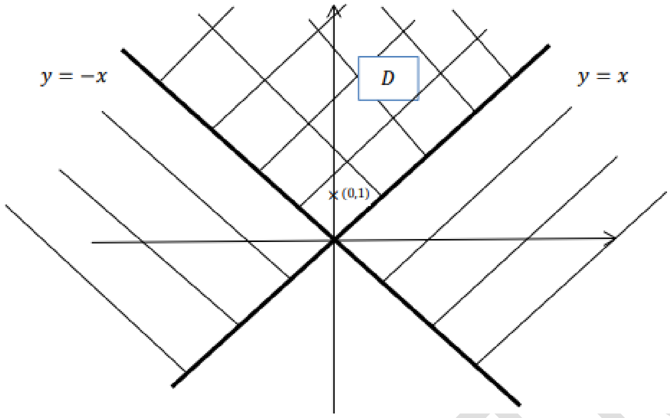
Montrer qu'il n'existe pas de surjection E dans P(E).

Solution : Soit f : E → P(E). On pose alors :
A = {x ∈ E | x ∉ f(x)} ∈ P(E), qui a bien un sens puisque : f(x) ⊆ E (c'est une partie de E).
Montrons que A n'a pas d'antécédent par f.
Supposons par l'absurde qu'il existe z ∈ E tel que A = f(z). On a alors deux possibilités :

— Ou bien z ∈ A et alors z ∈ f(z), donc z ∉ A par définition de A, ce qui est absurde,
— Ou bien z ∉ A et alors z ∉ f(z), donc z ∈ A par définition de A, ce qui est absurde.
Dans tous les cas, l'existence d'un antécédent de A par f est absurde, donc A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. 1

Exercice9 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$ Soit $f : D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :
$f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
1) Représenter D dans le plan.
2) a) Montrer que si deux couples de réels : (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient :
$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ et $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$
Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).
b) Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2) a).
3) Est-ce que f est surjective ?

Solution :1) Le point (0,1) vérifie $x \leq y$ donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$
Est le demi-plan supérieur droit.
De même (0,1) vérifie $-y \leq x$
Donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, D est l'intersection de ces deux demi-plan, D est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous



2) a) $L_1 : x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ et $L_2 : x_1 - y_1 = x_2 - y_2$
En additionnant L_1 et L_2 on trouve que $2x_1 = 2x_2$,
Donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans L_1, on trouve que : $y_1 = y_2$.
b) $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2)$
$\Rightarrow L_1 : x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ et $L_2 : 2x_1y_1 = 2x_2y_2$
$L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$,
Ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, Comme $x - y \leq 0$ sur D, cela donne :
$-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore : $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.
$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$,
Comme $x + y \geq 0$ sur D, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$
D'après 2) a). Cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$,
Ce qui montre que f est injective.
3) $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans D Car $x^2 + y^2 > 0$.

Exercice10 : Soit l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$ et l'application

$g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto E\left(\dfrac{n}{2}\right) \end{array}$ Où $E(x)$ désigne la partie entière de x 1) Les fonctions sont-elles injectives, surjective ?
2) Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution :1) a) $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$; Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$f(n)=f(m)\Rightarrow 2n=2m\Rightarrow n=m$

Donc : f est injective

• f est injective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall m\in\mathbb{N}$; $\forall n\in\mathbb{N}$: $f(n)=f(m)\Rightarrow n=m$

• 1 n'a pas d'antécédent par f : car il n'existe pas d'entier naturel n tel que : $2n=1$, f n'est pas surjective.

b) $g:\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ n\mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)\end{array}$

• On a : $g(0)=E\left(\frac{0}{2}\right)=E(0)=0$ et $g(1)=E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Donc $g(0)=g(1)$ ce qui entraine que g n'est pas injective.

• Soit : $m\in\mathbb{N}$ (dans l'ensemble d'arrivé) il existe : $n\in\mathbb{N}$ (dans l'ensemble de départ)

Tel que : $2n=m$

Il suffit de prendre : $n=2m$ en effet : $g(n)=g(2m)=E\left(\frac{2m}{2}\right)=E(m)=m$

g est donc surjective.

• f n'est pas injective si et seulement si il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{N}$ c'est-à-dire : $\exists n\in\mathbb{N}$; $\exists m\in\mathbb{N}$

$f(n)=f(m)$ *et* $n\neq m$

Si je trouve : $n\neq m$ et $f(n)=f(m)$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Si je prends : $(1;2)$ *et* $(2;1)$

On a : $f(1;2)=1\times 2=2$ et $f(2;1)=2\times 1=2$ donc : : $\exists(1;2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(2;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(1;2)=f(2;1)$ Mais $(1;2)\neq(1;2)$

Donc : f n'est pas injective

2) *Remarque :* $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall a\in\mathbb{R}$ on a : $E(n)=n$ et $E(n+a)=n+E(a)$

a) $f\circ g$ = ?

$(f\circ g)(n)=f(g(n))=f\left(E\left(\frac{n}{2}\right)\right)=2E\left(\frac{n}{2}\right)$

Si n est pair, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p$

$(f\circ g)(n)=2E\left(\frac{2p}{2}\right)=2E(p)=2p=n$

Si n est impaire, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$

$(f\circ g)(n)=2E\left(\frac{2p+1}{2}\right)=2E\left(p+\frac{1}{2}\right)=2\left(E(p)+E\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$(f\circ g)(n)=2(p+0)=2p=n-1$

Donc : $f\circ g:\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ n\mapsto\begin{cases}n & si\ n\ est\ pair\\ n-1 & si\ n\ est\ impair\end{cases}\end{array}$

b) $g\circ f$ = ?

$(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(2n)=E\left(\frac{2n}{2}\right)=E(n)=n$

Donc : $g \circ f : \begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n \end{matrix}$ c'est-à-dire : $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$

Donc : $g \circ f \neq f \circ g$: par exemple : $(g \circ f)(3) = 3$ et $(f \circ g)(3) = 3 - 1 = 2$

Remarque : Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que $g \circ f = id$ pour que g soit la bijection réciproque de f.
La définition de la bijection réciproque d'une fonction
f: $E \to E$ est : « S'il existe une fonction g: $E \to E$ telle que $f \circ$ g = g $\circ f$ = idE alors g = f^{-1}»
On a alors : f et g sont deux fonctions bijectives.

Exercice11 : On considère les applications : $f : \begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{matrix}$ et $g : \begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ p \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad p = 0 \\ p-1 & si \quad p \geq 0 \end{cases} \end{matrix}$

1)Étudier l'injectivité, la subjectivité, la bijectivité de f et g
2) Expliciter g ◦ f et f ◦ g.
Solution :
1) • ∀n ∈ N, f (n) = n + 1 ≥ 1 > 0. Ainsi, 0 n'a pas d'antécédent par f : f n'est pas surjective.
En revanche, si n et n' sont deux entiers naturels tels que :
f (n) = f (n'), on a n + 1 = n' + 1, donc n = n' .
f est finalement injective, mais non surjective,
Donc : f non bijective.
• g (0) = g (1) = 0 : g n'est donc pas injective, et donc pas bijective.
Soit p ∈ $\mathbb{N}$. g (p + 1) = (p + 1) − 1 = p (p ≥ 1) .
Tout entier naturel p admet un antécédent par g : g est surjective.
2) Soit p ∈ $\mathbb{N}$.
• (g ◦ f)(p) = g (f (p)) = g (p + 1) = p.
Ainsi, g ◦ f = $Id_{\mathbb{N}}$.
• Pour f ◦ g , il y a une disjonction de cas :
– Si p = 0 : (f ◦ g)(p) = (f ◦ g)(0) = f (g (0)) = f (0) = 1;
– Si p ≥ 1 : (f ◦ g)(p) = f (g (p)) = f (p − 1) = p − 1 + 1 = p.
Notons qu'alors h = f ◦ g n'est ni injective (h(0) = h(1) = 1), ni surjective
(0 n'a pas d'antécédent par h dans $\mathbb{N}$),
Alors que g ◦ f est bijective.

Exercice12 : Soit f une application de E vers E telle que : $f(f(E)) = E$
Montrer que f est surjective.
Solution : On a : $f(E) \subset E$ donc $f(f(E)) \subset f(E) \subset E$ Or $f(f(E)) = E$ donc $E \subset f(E) \subset E$
Par conséquent $E = f(E)$ ce qui signifie que f est surjective

Exercice13 : On considère l'application $f : \begin{matrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{matrix}$

1) Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2) Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Solution :1) Supposons que g existe, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$

$f \circ g = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f(g(n)) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (g(n))^2 = n$

Si n n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si n = 2, $(g(2))^2 = 2$ donc $g(2) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

Il n'existe donc pas $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$

2) Supposons que $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existe, telle que : $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$

$h \circ f = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ h(f(n)) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ h(n^2) = n$

Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque p est un carré a,

Donnons une fonction h qui répond à la question :

$$h : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ p \mapsto \begin{cases} h(p) = q & si \ p = q^2 \\ h(p) = 0 & si \ p \neq q^2 (n'est \ pas \ un \ carré) \end{cases} \end{array}$$

Exercice14 : Soit l'ensemble : $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / -y \leq x \leq y\}$ et soit l'application f :

$\begin{array}{l} D \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto (x^2+y^2 \ ; 2xy) \end{array}$ 1) Montrer que f est injective 2) f est-elle surjective ?

Solution : 1) Soit : $(x;y)$; $(x';y') \in D$ tel que : $f(x;y) = f(x';y')$:

Montrons que : $(x;y) = (x';y')$??

$$f(x;y) = f(x';y') \Leftrightarrow (x^2+y^2 \ ; 2xy) = (x'^2+y'^2 \ ; 2x'y')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = x'^2+y'^2 \ (1) \\ 2xy = 2x'y' \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2 = x'^2+2x'y'+y'^2 \ (1)+(2) \\ x^2-2xy+y^2 = x'^2-2x'y'+y'^2 \ (1)-(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = (x'+y')^2 \ et \ (x-y)^2 = (x'-y')^2 \Rightarrow |x+y| = |x'+y'| \ et \ |x-y| = |x'-y'|$$

On a : $(x;y)$; $(x';y') \in D$

Donc : $-y \leq x \leq y$ et $-y' \leq x' \leq y'$

Donc : $0 \leq x+y \leq 2y$ et $0 \leq x'+y' \leq 2y'$ et $2y \leq x-y \leq 0$ et $2y' \leq x'-y' \leq 0$

$\Rightarrow x+y = x'+y' \ et \ y-x = y'-x'$

$\Rightarrow x+y = x'+y' \ (3) et \ y-x = y'-x' \ (4)$

$(3)+(4)$et $(3)-(4) \Rightarrow \begin{cases} 2y = 2y' \\ 2x = 2x' \end{cases} \Rightarrow x = x' \ et \ y = y' \Rightarrow (x;y) = (x';y')$

Donc : f est injective

2) On remarque : $x^2+y^2 \geq 0$; $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

Par exemple : $(-1;1) \in \mathbb{R}^2$ et n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x;y) = (-1;1)$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

Exercice15 : Soit E un ensemble et P(E) l'ensemble de ses parties, Et soient A ; B des parties de E Soit l'application f : $\begin{array}{l} P(E) \to P(A)\times P(B) \\ X \mapsto (A\cap X; B\cap X) \end{array}$

1)Montrer que f est injective si et seulement si $A\cup B = E$

2)Montrer que f est surjective si et seulement si $A\cap B = \varnothing$

3)Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Indication :

1) Pour le sens direct, raisonner par contraposée. Pour le sens réciproque, remarquer que : X =(X∩A) ∪(X∩B).

2) Pour le sens direct, prendre x dans A et regarder l'antécédent de ({x}, ∅). Pour le sens réciproque, prendre A′⊂A et B′⊂B, et poser X=A′∪B′.

On a tout fait avant !

Solution : Pour démontrer le sens direct, on raisonne par contraposée : si A∪B≠E, on prend x∈E\(A∪B) et X={x}. Alors f(X)=(X∩A,X∩B)=(∅,∅) car x n'appartient ni à A ni à B.
D'autre part, f(∅)=(∅,∅)
Donc f(X)=f(∅) alors que X≠∅: ff n'est pas injective.
Pour le sens réciproque, remarquons que pour tout :X⊂E, puisque A∪B=E,

On a :X=X∩E=X∩(A∪B)=(X∩A)∪(X∩B)
Ainsi, si X,X′⊂E sont tels que f(X)=f(X′), c'est-à-dire X∩A=X′∩Aet X∩B=X′∩B,
On a : X=(X∩A)∪(X∩B)=(X′∩A)∪(X′∩B)=X′.
Ainsi, f est injective.
Supposons d'abord que f est surjective et prenons x∈A.
Alors il existe X⊂E tel que f(X)=({x},∅).
Alors, on a X∩B=∅ et x∈X∩A.
Ainsi, x∈X et donc x∉B. Ainsi, on a A∩B=∅
Réciproquement, si A∩B=∅, et prenons A′⊂A et B′⊂B. Alors, posons X=A′∪B′.
Puisque A∩B=∅, on a X∩A=A′ et X∩B=B′ et donc f(X) = (A′, B′) : f est surjective.
D'après les questions précédentes, on a f bijective si et seulement si A∪B=E et A∩B=∅, c'est-à-dire : si (A,B) est une partition de E.
La bijection réciproque a été établie à la question précédente et est donnée par (A′,B′)↦A′∪B′.

Exercice16 : Soit $f : E \to F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$
Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective
(ii) f est surjective
(iii) f est bijective

Solution : On pose $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, et bien sur tous les e_j sont distincts ainsi que tous les f_i.
On rappelle que le fait que f soit une application entraine que :
$\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$,
On suppose que f est injective, on va montrer que f est surjective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas surjective alors f n'est pas injective.
Soit $f_i \in F$ et on suppose qu'il n'existe pas de $e_j \in E$ tel que $f_i = f(e_j)$ (f n'est pas surjective)
Donc $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots f_n\}$,
il y a n éléments dans le premier ensemble et $n-1$ dans le second, donc il existe j_1 et j_2, avec $j_1 \neq j_2$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ tels que $f(e_{j1}) = f(e_{j2})$, or $e_{j1} \neq e_{j2}$ donc f n'est pas injective.
On suppose que f est surjective et on va montrer que f est injective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas injective alors f n'est pas surjective.
Si $f(e_i) = f(e_j) = u$ avec $e_i \neq e_j$
Alors $\{f(e_1), , f(e_{i-1}), u, f(e_{i+1}), , f(e_{j-1}), u, f(e_{j+1}) \dots , f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots , f_n\}$, le premier ensemble à $n-1$ éléments et le second n donc il existe un f_j qui n'a pas d'antécédent, cela montre que f n'est pas surjective.
On a montré que $(i) \Leftrightarrow (ii)$,
Par définition $(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$.
Si on a (i) alors on a (ii) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii)
De même si on a (ii) alors on a (i) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii).
Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Exercice17 : Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f: E \to \mathcal{P}(E)$.
Indication : Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Solution : Supposons qu'il existe $f: E \to \mathcal{P}(E)$ surjective
Considérons la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.
Montrons que A n'a pas d'antécédent par f :
$f: E \to \mathcal{P}(E)$ surjective donc : Il existe : $x_0 \in E$, un antécédent de A, donc par définition $f(x_0) = A$,

- Si $x_0 \in f(x_0)$ alors $x_0 \in A$ et donc $x_0 \notin f(x_0)$ ce qui est contradictoire
- Si $x_0 \notin f(x_0)$ alors par définition de A, $x_0 \in A = f(x_0)$ ce qui est aussi contradictoire.

L'hypothèse est donc fausse, il n'y a pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$

Exercice18 : Pour un entier $n \in \mathbb{N}$; on désigne par : I_n L'ensemble $I_n = \{1;2;3;...;n\}$

1) On suppose : $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f : I_2 \to I_n$?

2) A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Solution :1) Première méthode : raisonnons par récurrence

On pose : (P_n) il y a $n(n-1)$ applications injectives de $f : I_2 \to I_n$.

Regardons si (P_2) est vraie.

Il y a 4 applications de $f : I_2 \to I_2$: $f_1(1) = 1$ et $f_1(2) = 1$; $f_2(1) = 1$ et $f_2(2) = 2$

$f_3(1) = 2$ et $f_3(2) = 1$; $f_4(1) = 2$ et $f_4(2) = 2$

Seules f_2 et f_4 sont injectives.

Il y a $2(2-1) = 2$ applications injectives de $I_2 \to I_2$ Montrons que : $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$

Supposons qu'il y a $n(n-1)$ applications injectives de : $\{1;2\}$ dans $I_n = \{1;2;3;...;n\}$

Montrons qu'il y 'a $n(n+1)$ applications injectives de : $\{1;2\}$ Dans $I_{n+1} = \{1;2;3;...;n;n+1\}$

Supposons que : $f(1) = n+1$ alors $f(2) \in \{1;2;3;...;n\}$ (pour que $f(1) \neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

Supposons que : $f(2) = n+1$ alors : $f(1) \in \{1, \dots, n\}$ (pour que $f(1) \neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus. Au total, il y a : $n(n-1) + n + n = n^2 - n + 2n = n^2 + n = n(n+1)$

L'hypothèse est vérifiée.

Conclusion pour tout $n \geq 2$, il y a $n(n-1)$ applications injectives de $I_2 \to I_n$.

Deuxième méthode : Si $f(1) = k \in \{1;2;3;...;n\}$

Alors : $f(2) \in \{1;2;3;...;k-1;k+1;..;n\}$.

Cela fait n choix possibles pour $f(1)$ et n pour $f(2)$ soit $n(n-1)$ choix possibles pour : $(f(1);f(2))$

De façon à ce que : $f(1) \neq f(2)$ (Autrement dit pour que f soit injective).

2) $f : I_m \to I_n$: f injective équivaut à : $f(1) = k_1$; $f(2) = k_2$; ... ; $f(m) = k_m$,

Avec : $k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1,2, \dots, n\}$ tous distincts par conséquent $m \leq n$.

Remarque : Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, m\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont injectives !

Supposons que f est surjective.

Pour tout : $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1,2, \dots, n\}$ (les k_i tous distincts) il existe :

$q_1, q_2, \dots, q_m \in \{1,2, \dots, m\}$ tels que $k_i = f(q_i)$

Par définition d'une application tous les q_i sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent $n \leq m$. Pour que f soit bijective il faut (et il suffit) que f soit injective et surjective, par conséquent il faut que :

$m \leq n$ et que $n \leq m$, autrement dit il faut que $m = n$.

Remarque : Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, n\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont bijectives

Exercice19 : Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$; $B \subset F$

1)Montrer que : $f(f^{-1}(B)) \subset B$

2)Montrer que : $A \subset f^{-1}(f(A))$

Solution : 1) Il s'agit de montrer des inclusions :

- Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B$. on en déduit que $y \in B$ et donc que : $f(f^{-1}(B)) \subset B$
- Soit $x \in A$, Par définition de l'image directe, $f(x) \in f(A)$.

Par définition de l'image réciproque, $x \in f^{-1}(f(A))$.

On en déduit que $x \in f^{-1}(f(A))$ et donc que $A \subset f^{-1}(f(A))$

b) Posons: $B = [-1 ;1]$: $f(f^{-1}(B)) = f([-1;1]) = [0;1] \cong B$.

Posons: $A = [-1;2]$; $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0;4]) = [-2;2] \cong A$.

c) On procède par double-inclusion :

- On a vu que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et comme $f^{-1}(B) \subset E$,

On a $f(f^{-1}(B)) \subset f(E)$ (exercice 2.3) et donc $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(E)$.

- Soit $y \in B \cap f(E)$, comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que

$y = f(x)$. On a aussi $y \in B$ donc $f(x) \in B$ et $x \in f^{-1}(B)$), par suite $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, ce qui montre que : $B \cap f(E) \subset f(f^{-1}(B))$.

Conclusion : $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$ Conséquence : Si f est surjective alors $f(E) = F$ et $B \cap f(E) = B$, on aura donc :$f(f^{-1}(B)) = B$.

2)On peut également montrer que si f est injective Alors $f^{-1}(f(A)) = A$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien