1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°11 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Ecrire en extension l'ensemble suivant : $E=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right): n\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice2 : Soit l'ensemble suivant : $A=\left\{\frac{2x}{x^2+1} / x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{2}\in A$ et en déduire que : $A\neq\varnothing$

2) Montrer que : $A\subset[-1;1]$

Exercice3 : On considère les ensembles suivants : $E=\{1;2;3;4;5;6;....;20\}$

A et B deux parties de E tel que : $A=\{x\in E \ / \ x=4k;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\{x\in E \ / \ x=3k;k\in\mathbb{N}\}$

1) Ecrire en extension les ensembles A et B.

2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$; $C_E^{A\cap B}$; $C_E^A\cup C_E^B$ et $C_E^A\cap C_E^B$

3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A\cap C_E^B$

b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A\cup C_E^B$

Exercice4 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E non vide.

Simplifier : $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup \text{A}$

Exercice5 : Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

On suppose que : $A\cap B\neq\emptyset$; $A\cup B\neq E$; $A\not\subseteq B$; $B\not\subseteq A$;

On pose $A_1 = A\cap B$; $A_2 = A\cap C_E^B$ et $A_3 = B\cap C_E^A$; $A_4 = C_E^{A\cup B}$

1) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.

2) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.

3) Montrer que $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4 = E$.

Exercice6 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3+x\end{array}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$; $x^2+xy+y^2+1\succ 0$

2) Montrer que : f est injective

Exercice7 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{*+}\\ x\mapsto\dfrac{1}{x^2-2x+2}\end{array}$

1) Montrer que : f n'est pas injective

2) a) Montrer que : $f(\mathbb{R})=]0;1]$

b) f est-elle surjective ? justifier

Exercice8 : Soit l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x|x|}{x^2+1}\end{array}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

b) f est-elle surjective ? justifier

2) Montrer que f est injective

3) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$

b) Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice9 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.
1) Montrer que pour toute partie A de E, on a :$A \subset f^{-1}(f(A))$.
2) Montrer que pour toute partie B de F, on a :$f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}(f(A))$.
4) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B)) = B$
5) Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, on a : $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$

Exercice10 : Soient E ; F ; G trois ensembles et f une application de F dans G

Montrer que : f est injective si et seulement si $\forall (g;h) \in \left(A(E;F)\right)^2$; $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

Remarque : $A(E;F)$ l'ensembles des applications de E dans F .

Exercice11 : Fonctions caractéristiques

Soit A une partie d'un ensemble E. On lui associe l'application suivante : $$\begin{array}{l} I_A : E \to \{0;1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

a) $I_{B-A} = I_B - I_A$ si A ⊆ B. b) $I_{A\cap B} = I_A \times I_B$

c) $I_{A\cup B} = I_A + I_B$, si A et B sont disjointes. d) $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B}$

2) On note F(E, {0, 1}) l'ensemble des applications de E dans {0, 1}.

Montrer que l'application : $\begin{array}{l} f : P(E) \to \mathrm{F}(\mathrm{E},\ \{0,\ 1\}) \\ A \mapsto I_A \end{array}$ est une bijection.

3) Soit C ∈ P(E).
Montrer que A∆B = A∆C si, et seulement si B = C. (En ne faisant que des calculs de fonctions caractéristiques.)

Exercice12 : Résoudre dans : $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'équation : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $f(x+y) = x + y^2$

$A(\mathbb{R};\mathbb{R})$: désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien