1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°11 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Ecrire en extension l'ensemble suivant : $E=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$

Solution : On sait que la fonction cos est périodique de période 2π et $\frac{n\pi}{6}=2\pi\Leftrightarrow n=12$

$n\in\{0;1;2;3;..;11\}$

On a donc : $B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in[0;11]\right\}$

En tenant compte des relations : $\sin(\pi-x)=\sin x=-\sin(\pi+x)=-\sin(-x)$

On en déduit : $B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right\}$

Exercice2 : Soit l'ensemble suivant : $A=\left\{\frac{2x}{x^2+1}\,/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{2}\in A$ et en déduire que : $A\neq\varnothing$

2) Montrer que : $A\subset[-1;1]$

Solution : 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\in A\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{2x}{x^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\sqrt{3}\left(x^2+1\right)=4x\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\left(x^2+1\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}x$

$\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2-4\sqrt{3}x+3=0$

$\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\left(\sqrt{3}x\right)^2-2\times2\sqrt{3}x+\left(\sqrt{3}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\left(\sqrt{3}x-3\right)^2=0\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\sqrt{3}x-3=0$

or : $\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\sqrt{3}x-3=0$ est vraie car : $\exists x=\sqrt{3}\in\mathbb{R}\,/\,\sqrt{3}x-3=0$

Par suite : $\frac{\sqrt{3}}{2}\in A$ est vraie aussi

Remarque : on peut remarquer que : $\frac{2\times\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{2x}{x^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D'où : $\frac{\sqrt{3}}{2}\in A$

2) Montrons que : $A\subset[-1;1]$

Soit $y\in A$ Montrons que : $y\in[-1;1]$?

C'est à dire : Montrons que : $|y|\leq1$

On a : $y\in A$ Donc : $\exists x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{2x}{x^2+1}=y$

$$|y|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{|2x|}{|x^2+1|}=\frac{2|x|}{x^2+1}$$

$$1-\frac{2|x|}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2|x|}{x^2+1}=\frac{|x|^2+1-2|x|}{x^2+1}=\frac{\left(|x|-1\right)^2}{x^2+1}\geq 0$$

Donc : $|y|\leq 1$

D'où : $\forall y\in\mathbb{R}$; $y\in A\Rightarrow[-1;1]$

Conclusion : $A\subset[-1;1]$

Exercice3 : On considère les ensembles suivants : $E=\{1;2;3;4;5;6;....;20\}$

A et B deux parties de E tel que : $A=\{x\in E\ /\ x=4k;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\{x\in E\ /\ x=3k;k\in\mathbb{N}\}$

1) Ecrire en extension les ensembles A et B.

2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$; $C_E^{A\cap B}$; $C_E^A\cup C_E^B$ et $C_E^A\cap C_E^B$

3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A\cap C_E^B$

b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A\cup C_E^B$

Solution : 1) $A=\{4;8;12;16;20\}$ et $B=\{3;6;9;12;15;18\}$

2) $C_E^A=\{x\in E\ /\ x\notin A\}$

$C_E^A=\{1;2;3;5;6;7;9;10;11;13;14;15;17;18;19\}$

$C_E^B=\{x\in E\ /\ x\notin B\}$

$C_E^B=\{1;2;4;5;7;8;10;11;13;14;16;17;19;20\}$

$A\cap B=\{12\}$

$A\cup B=\{3;4;6;8;9;12;15;16;18;20\}$

$C_E^{A\cup B}=\{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

$C_E^{A\cap B}=E-\{12\}=\{1;2;3;4;11;13....;20\}$

$C_E^A\cap C_E^B=\{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

$C_E^A\cup C_E^B=\{1;2;3;4;11;13....;20\}$

3) On remarque que :

a) $C_E^{A\cup B}=C_E^A\cap C_E^B$ b) $C_E^{A\cap B}=C_E^A\cup C_E^B$

Exercice4 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E non vide.

Simplifier : $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A$

Solution: $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A=\left(\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{C}}\right)\right)\cup A$

$=\left(\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{A}\cup C\right)\right)\cup A=\left(\overline{A}\cup(B\cap C)\right)\cup A$

$=\left(\overline{A}\cup A\right)\cup(B\cap C)=E\cup(B\cap C)=E$

Exercice5 : Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

On suppose que : $A\cap B\neq\emptyset$; $A\cup B\neq E$; $A\not\subset B$; $B\not\subset A$;

On pose $A_1=A\cap B$; $A_2=A\cap C_E^B$ et $A_3=B\cap C_E^A$; $A_4=C_E^{A\cup B}$

1) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.
2) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
3) Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Solution :1) $A_1 = A \cap B \neq \emptyset$

D'après l'énoncé : $A_2 = A \cap C_E^B = A \setminus B \neq \emptyset$ Car $A \not\subseteq B$.

$A_3 = B \cap C_E^A = B \setminus A \neq \emptyset$ Car $B \not\subseteq A$

$A_4 = C_E^{A\cup B}) = E \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$ Car $A \cup B \neq E$,

en fait $A \cup B \not\subseteq E$ car $A \subset E$ et $B \subset E$.

2) $A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap C_E^B) = A \cap B \cap A \cap C_E^B = (A \cap A) \cap (B \cap C_E^B) = A \cap \emptyset = \emptyset$

$A_1 \cap A_3 = (A \cap B) \cap (B \cap C_E^A) = A \cap B \cap B \cap C_E^A = (B \cap B) \cap (A \cap C_E^A) = B \cap \emptyset = \emptyset$

$A_1 \cap A_4 = (A \cap B) \cap (C_E^{A\cup B}) = (A \cap B) \cap (C_E^A \cap C_E^B)$

$= A \cap B \cap C_E^A \cap C_E^B = (A \cap CEA) \cap (B \cap C_E^B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

$A_2 \cap A_3 = (A \cap C_E^B) \cap (B \cap C_E^A)$

$= A \cap C_E^B \cap B \cap C_E^A = (A \cap C_E^A) \cap (B \cap C_E^B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

$A_2 \cap A_4 = (A \cap C_E^B) \cap C_E^{A\cup B}$

$= (A \cap C_E^B) \cap (C_E^A \cap C_E^B)$

$= A \cap C_E^B \cap C_E^A \cap C_E^B$

$= (A \cap C_E^A) \cap (C_E^B \cap C_E^B) = \emptyset \cap C_E^B = \emptyset$

$A_3 \cap A_4 = (B \cap C_E^A) \cap C_E^{A\cup B}$

$= (B \cap C_E^A) \cap (C_E^A \cap C_E^B)$

$= B \cap C_E^A \cap C_E^A \cap C_E^B$

$= (B \cap C_E^B) \cap (C_E^A \cap C_E^A) = \emptyset \cap C_E^A = \emptyset$

3) A_1, A_2, $A3$ et A_4 sont deux à deux disjoints.

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (A \cap B) \cup (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) \cup C_E^{A\cup B}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) \cup (C_E^A \cap C_E^B)$

$= [(A \cap B) \cup (A \cap C_E^B)] \cup [(B \cap C_E^A) \cup (C_E^A \cap C_E^B)]$

$= [(A \cup A) \cap (A \cup C_E^B) \cap (B \cup A) \cap (B \cup C_E^B)] \cup [(B \cup C_E^A) \cap (B \cup C_E^B) \cap (C_E^A \cup C_E^A) \cap (C_E^A \cup C_E^B)]$

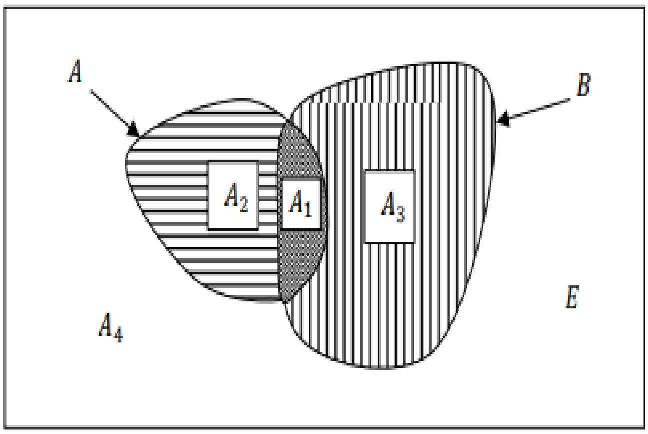
$= [A \cap (A \cup C_E^B) \cap (A \cup B) \cap E] \cup [(B \cup C_E^A) \cap E \cap C_E^A \cap (C_E^A \cup C_E^B)]$

$= [A \cap \{(A \cup C_E^B) \cap (A \cup B)\}] \cup [C_E^A \cap \{(B \cup C_E^A) \cap (C_E^A \cup C_E^B)\}]$

$= [A \cap \{A \cup (C_E^B \cap B)\}] \cup [C_E^A \cap \{C_E^A \cup (B \cap C_E^B\}] = [A \cap \{A \cup \emptyset\}] \cup [C_E^A \cap \{C_E^A \cup \emptyset\}]$

$= [A \cap A] \cup [C_E^A \cap C_E^A] = A \cup C_E^A = E$

Remarque : (A_1, A_2, A_3, A_4) est une partition de E.
Sur un schéma c'est une évidence (E est le carré sur le schéma).



Exercice6 : Soit f l'application : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x \end{array}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

2) Montrer que : f est injective

Solution :1) Soit $y \in \mathbb{R}$ (on le fixe)

L'équation : $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$ devient une équation dont la variable est x

$\Delta = y^2 - 4 \times 1 \times (y^2 + 1) = y^2 - 4y^2 + -4 = -3y^2 - 4 = -(3y^2 + 4) \prec 0$

Le signe de : $x^2 + xy + y^2 + 1$ est celui de $a = 1$

Donc : $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$

2) Montrons que : f est injective : Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Supposons que : $f(x_1) = f(x_2)$

Donc : $x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0$

Comme : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$; $x^2 + xy + y^2 + 1 \succ 0$ alors $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 \neq 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Par suite : f est injective

Exercice7 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} \end{array}$

1) Montrer que : f n'est pas injective

2) a) Montrer que : $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

b) f est-elle surjective ? justifier

Solution : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

1) Montrons que : f n'est pas injective

On a : $f(0) = f(2) = \dfrac{1}{2}$ mais : $0 \neq 2$

Ceci signifie que l'application f n'est pas injective

2) a) Montrons que : $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

On montre par double inclusions.

$\subset$) Soit $y \in f(\mathbb{R})$; il existe $x \in \mathbb{R}$; tel que : $f(x) = y$

On a : $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}=\frac{1}{x^2-2x+1+1}=\frac{1}{(x-1)^2+1}$

Comme : $(x-1)^2\geq 0$ alors : $(x-1)^2+1\geq 1$

Donc : $0\prec\frac{1}{(x-1)^2+1}\leq 1$ c'est-à-dire : $f(x)=y\in\left]0;1\right]$

C'est-à-dire : $f(\mathbb{R})\subset\left]0;1\right]$

$\supset)$ Soit $y\in\left]0;1\right]$

Résolvons l'équation : $f(x)=y$ dans $\mathbb{R}$

$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{x^2-2x+2}=y\Leftrightarrow 1=y\left(x^2-2x+2\right)$

Car : $x^2-2x+2\neq 0$ $(\Delta\prec 0)$

$f(x)=y\Leftrightarrow yx^2-2xy+2y-1=0$

Le discriminant Δ de l'équation est :

$\Delta=b^2-4ac=(-2y)^2-4y\times(2y-1)=4y\times(1-y)$

On a : $y\in\left]0;1\right]\Rightarrow 0\prec y\leq 1$ alors : $0\leq 1-y\prec 1$ Donc : $\Delta=4y\times(1-y)\geq 0$

Donc l'équation f(x) = y admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$: Ceci signifie que : $y\in f(\mathbb{R})$

C'est-à-dire : $\left]0;1\right]\subset f(\mathbb{R})$

Par suite : $f(\mathbb{R})=\left]0;1\right]$

b) L'application f n'est pas surjective, car 2 n'a pas
D'antécédent par f

Exercice8 : Soit l'application : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{x|x|}{x^2+1}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

b) f est-elle surjective ? justifier

2) Montrer que f est injective

3) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$

b) Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : $f(x)=\frac{x|x|}{x^2+1}$

1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $x\geq 0$: $|x|=x$ et $f(x)=\frac{x\times x}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$

$1-f(x)=1-\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\succ 0$ donc : $f(x)\prec 1$

$f(x)-(-1)=\frac{x^2}{x^2+1}+1=\frac{x^2+x^2+1}{x^2+1}=\frac{2x^2+1}{x^2+1}\succ 0$ donc : $-1\prec f(x)$

C'est-à-dire : $\forall x \geq 0$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

Si : $x \prec 0$: $|x| = -x$ et $f(x) = \dfrac{-x \times x}{x^2+1} = \dfrac{-x^2}{x^2+1}$

On déjà montrer que : $-1 \prec \dfrac{x^2}{x^2+1} \prec 1$ (on procède comme précédemment)

Donc : $-1 \prec -\dfrac{x^2}{x^2+1} \prec 1$

C'est-à-dire : $\forall x \prec 0$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \prec f(x) \prec 1$

Donc : L'application f n'est pas surjective car 2 par exemple n'a pas d'antécédent par f

2) Montrons que f est injective :

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1|x_1|}{x_1{}^2+1} = \dfrac{x_2|x_2|}{x_2{}^2+1}$ *est vraie* $\Rightarrow x_1$ *et* x_2 Ont le même signe.

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $x_1 = 0$ alors : $\dfrac{0 \times |0|}{0^2+1} = \dfrac{x_2|x_2|}{x_2{}^2+1} \Rightarrow 0 = x_2|x_2| \Rightarrow 0 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Si : $x_1 \succ 0$ et $x_2 \succ 0$ $\Rightarrow \dfrac{x_1|x_1|}{x_1{}^2+1} = \dfrac{x_2|x_2|}{x_2{}^2+1} \Rightarrow \dfrac{x_1{}^2}{x_1{}^2+1} = \dfrac{x_2{}^2}{x_2{}^2+1} \Rightarrow x_1{}^2(x_2{}^2+1) = x_2{}^2(x_1{}^2+1)$

$\Rightarrow x_1{}^2x_2{}^2 + x_1{}^2 = x_2{}^2x_1{}^2 + x_2{}^2 \Rightarrow x_1{}^2 = x_2{}^2 \Rightarrow \sqrt{x_1{}^2} = \sqrt{x_2{}^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ et comme : $x_1 \succ 0$ et $x_2 \succ 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Si : $x_1 \prec 0$ et $x_2 \prec 0$ $\Rightarrow \dfrac{x_1|x_1|}{x_1{}^2+1} = \dfrac{x_2|x_2|}{x_2{}^2+1} \Rightarrow \dfrac{-x_1{}^2}{x_1{}^2+1} = \dfrac{-x_2{}^2}{x_2{}^2+1} \Rightarrow \dfrac{x_1{}^2}{x_1{}^2+1} = \dfrac{x_2{}^2}{x_2{}^2+1}$

$\Rightarrow x_1{}^2 = x_2{}^2 \Rightarrow \sqrt{x_1{}^2} = \sqrt{x_2{}^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ et comme : $x_1 \prec 0$ et $x_2 \prec 0$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc : $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall x_2 \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x_1|x_1|}{x_1{}^2+1} = \dfrac{x_2|x_2|}{x_2{}^2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

3) Déterminons : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}\right\}$$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x|x| + 1 = 0$

Si : $x \geq 0$ $\quad x^2 - 2x \times x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \cancel{x = -1}$ *ou* $x = 1$

Puisque : $x \geq 0$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Si : $x \prec 0$ $\quad x^2+2x\times x+1=0 \Leftrightarrow x^2+2x^2+1=0 \Leftrightarrow 3x^2=-1 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{3}$ pas de solutions

Conclusion : $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$

Par suite : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\{1\}$

4) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Soit : $y \in]-1,1[$: Montrons que : $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x|x|}{x^2+1}=y$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $y=0$ alors $\frac{x|x|}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

Donc : $\exists! x=0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=0$

Si : $y \in]0,1[$ alors $\frac{x|x|}{x^2+1}=y \Rightarrow x \succ 0$

$\frac{x^2}{x^2+1}=y \Leftrightarrow x^2=(x^2+1)y \Leftrightarrow x^2-x^2y=y \Leftrightarrow x^2(1-y)=y \Leftrightarrow x^2=\frac{y}{1-y} \succ 0$ car : $y=]0,1[$

$\frac{x^2}{x^2+1}=y \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ car : $x \succ 0$

Donc : Si : $y \in]0,1[$ alors $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Si : $y \in]-1,0[$ alors $-1 \prec y \prec 0$

Donc : $\frac{x|x|}{x^2+1}=y \Rightarrow x \prec 0$

$\frac{-x^2}{x^2+1}=y \Leftrightarrow -x^2=(x^2+1)y \Leftrightarrow -x^2-x^2y=y \Leftrightarrow -x^2(1+y)=y \Leftrightarrow x^2=\frac{-y}{1+y} \succ 0$ car : $-1 \prec y \prec 0$

$-\frac{x^2}{x^2+1}=y \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{-y}{1+y}}$ car : $x \prec 0$

Donc : Si : $y \in]-1,0[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Conclusion : $\forall y \in]-1,1[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x)=y$

Par suite : f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Résumé : Si : $y \in [0,1[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{y}{1-y}}=f^{-1}(y)$

Si : $y \in]-1,0[$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{-y}{1+y}}=f^{-1}(y)$

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $\begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{1-x}} si \quad x \in [0,1[\\ -\sqrt{\frac{-x}{1+x}} si \quad x \in]-1,0[\end{cases} \end{array}$

Exercice9: Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.

1) Montrer que pour toute partie A de E, on a :$A \subset f^{-1}(f(A))$.

2) Montrer que pour toute partie B de F, on a :$f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}(f(A))$.

4) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B)) = B$

5) Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E, on a : $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$

Solution :1) Pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$,
Ce qui montre que $A \subset f^{-1}(f(A))$

2) Pour tout $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, comme $x \in f^{-1}(B)$ $f(x) \in B$
Ce qui entraine que $y \in B$
Ce qui montre que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3) Comme « pour toute partie A de E,
On a $A \subset f^{-1}(f(A))$ » la question revient à montrer que :
« f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A \supset f^{-1}(f(A))$ »
Si f est injective. Pour tout $x \in f^{-1}(f(A))$, $f(x) \in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x' \in A$
(Attention, à priori ce n'est pas le même x que celui du début de la phrase) tel que $f(x) = f(x')$
comme f est injective :$x = x'$, par conséquent $x \in A$.
On a montré que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Si pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$
$f(x_1) = f(x_2) = y$
On prend $A = \{x_1\}$: $f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{y\}$
$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$
D'après l'hypothèse $f^{-1}(f(A)) \subset A$
Donc $\{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$ Or $x_2 \in f^{-1}(y)$ car $f(x_2) = y$
Donc $x_2 \in \{x_1\}$ par conséquent $x_1 = x_2$ ce qui signifie que f est injective.
Finalement on a montré l'équivalence demandée.

4) Comme « pour toute partie B de F, on a :
$f(f^{-1}(B)) \subset B$ » la question revient à montrer que :
« f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a : $f(f^{-1}(B)) \supset B$ »
Si f est surjective.
Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective.
$x \in f^{-1}(B)$ entraine que : $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$,
Cela montre que $B \subset f(f^{-1}(B))$.
Si pour tout $B \subset f(f^{-1}(B))$
On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$
ce qui s'écrit aussi $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$,
il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$,
Cela montre bien que f est surjective.
Finalement on a montré l'équivalence demandée

6)Supposons que f est bijective et Montrons que : $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$

Soit : $y \in f\left(\overline{A}\right) \Rightarrow \exists x \in \overline{A}$ tel que $y \in f(x)$

$\Rightarrow \exists x \in E$ et $x \notin A$ tel que $y \in f(x)$

Or $x \notin A$ alors : $f(x) \notin f(A)$ car

Si $f(x) \in f(A)$ alors :$\exists a \in A$ tel que $y \in f(a)$

Donc : $f(a) = f(x)$ et donc : $a = x$ car f injective

Donc : absurde

Donc : $f(x) \notin f(A) \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$

Par suite : $f\left(\overline{A}\right)\subset\overline{f(A)}$

Inversement : Soit : $y\in\overline{f(A)}\Rightarrow y\notin f(A)$ et $y\in F$

Or $y\in F$ et f surjective alors : $\exists x\in E\;\; y=f(x)$

$\Rightarrow f(x)\notin f(A)\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\in\overline{A}\Rightarrow f(x)=y\in f\left(\overline{A}\right)$

Par suite : $\overline{f(A)}\subset f\left(\overline{A}\right)$

Donc : si f est bijective alors : $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f(A)}$

$\Leftarrow$) si $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f(A)}$ montrons que f est bijective

- Montrons que f est surjective

Il suffit démontrer que : $f(E)=F$

Si : $A=\varnothing$. $\Rightarrow f\left(\overline{\varnothing}\right)=\overline{f(\varnothing)}\Rightarrow f(E)=\overline{\varnothing}=E$

Donc : f est surjective

- Montrons que f est injective

Il suffit de montrer que : $f^{-1}\left(f(A)\right)=A$

On a : $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f(A)}\Rightarrow\overline{f\left(\overline{A}\right)}=f(A)\Rightarrow f^{-1}\left(\overline{f\left(\overline{A}\right)}\right)=f^{-1}\left(f(A)\right)\Rightarrow f^{-1}\left(\overline{f\left(\overline{A}\right)}\right)\Rightarrow A=f^{-1}\left(f(A)\right)$

Exercice10 : Soient E ; F ; G trois ensembles et f une application de F dans G

Montrer que : f est injective si et seulement si $\forall(g;h)\in\left(A(E;F)\right)^2$; $f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$

Remarque : $A(E;F)$ l'ensembles des applications de E dans F .

Solution : $\Rightarrow$) On suppose que : f est injective

Soient : $g;h$ deux applications de E dans F

Telles que : $f\circ g=f\circ h$

Alors : $\forall x\in E$; $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$

Donc : $\forall x\in E$; $f\left(g(x)\right)=f\left(h(x)\right)$

Puisque : f est injective alors : $\forall x\in E$: $g(x)=h(x)$

Donc : $g=h$

$\Leftarrow$) Au lieu de montrer que :

($\forall(g;h)\in\left(A(E;F)\right)^2$; $f\circ g=f\circ h\;\Rightarrow g=h$)

$\Rightarrow f$ est injective

On démontre la contraposée :

C'est-à-dire : On démontre que :

f n'est pas injective $\Rightarrow$ on peut trouver $g;h$ deux applications de E dans F

Telles que : $g\neq h$ et $f\circ g=f\circ h$

f N'est pas injective $\Rightarrow$ il existent $a\in F;b\in F$ tels que : $f(a)=f(b)$ et $a\neq b$

On définit : $\begin{array}{l} g:E\to F \\ \quad x\mapsto a\end{array}$ et On définit : $\begin{array}{l} h:E\to F \\ \quad x\mapsto b\end{array}$

On a : $(g;h)\in\left(A(E;F)\right)^2$ et $g\neq h$

Soit $x\in E$: $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f(a)=f(b)$

$(f\circ h)(x)=f\left(h(x)\right)=f(b)=f(a)$

On donc aussi : $f \circ g = f \circ h$

Donc : on a établi que : par contraposée que :

$\left(\forall (g;h) \in \left(A(E;F)\right)^2 \ ; \ f \circ g = f \circ h \ \Rightarrow g = h\right)$

$\Rightarrow f$ est injective.

Le but est de tester si vous avez bien compris la définition de fonctions injectives, surjectives, bijectives, à l'aide d'exercices simples. Faites bien attention aux ensembles de départ et d'arrivée de ces fonctions

Exercice11 : Fonctions caractéristiques

Soit A une partie d'un ensemble E. On lui associe l'application suivante : $\begin{array}{l} I_A : E \to \{0;1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & si \ \ x \in A \\ 0 & si \ \ x \notin A \end{cases} \end{array}$

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

a) $I_{B-A} = I_B - I_A$ si A ⊆ B.

b) $I_{A \cap B} = I_A \times I_B$

c) $I_{A \cup B} = I_A + I_B$, si A et B sont disjointes.

d) $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$

2) On note F(E, {0, 1}) l'ensemble des applications de E dans {0, 1}.

Montrer que l'application : $\begin{array}{l} f : P(E) \to \mathrm{F}(\mathrm{E}, \ \{0, \ 1\}) \\ A \mapsto I_A \end{array}$ est une bijection.

3) Soit C ∈ P(E).

Montrer que A∆B = A∆C si, et seulement si B = C. (En ne faisant que des calculs de fonctions caractéristiques.)

Solution :1) (a), (b), (c) Les trois réponses étant similaires, on traite intégralement la première, et laissons les autres au lecteur ou à la lectrice. Soient donc A et B deux parties de E telles que A ⊆ B. On souhaite montrer que pour tout x ∈ E,

$I_{B-A}(x) = I_B(x) - I_A(x)$ Soit x ∈ E.

1er cas : x ∈ B \ A. On a alors $I_{B-A}(x) = 1$.

Comme x ∈ B, on a $I_B(x) = 1$ et comme x ∉ A, $I_A(x) = 0$.

Ainsi, on a bien : $I_B(x) - I_A(x) = 1 - 0 = 1 = I_{B-A}(x)$

2nd cas : x ∉ B \ A. On a alors que $I_{B-A}(x) = 0$.

De plus, il y a alors deux possibilités :

ou bien x ∉ B, ou bien x ∈ A.

Si x ∉ B, alors $I_B(x) = 0$ et x ∉ A car A ⊆ B,

Donc : aussi $I_A(x) = 0$.

Ainsi : $I_B(x) - I_A(x) = 0 - 0 = 0 = I_{B-A}(x)$

Si x ∈ A, alors aussi x ∈ B car A ⊆ B.

On aura donc $I_B(x) - I_A(x) = 1 - 1 = 0 = I_{B-A}(x)$ Conclusion : dans tous les cas, on a bien montré que pour tout x ∈ E, $I_{B-A}(x) = I_B(x) - I_A(x)$

C'est à dire : $I_{B-A} = I_B - I_A$

d) On utilise les questions précédentes et le fait que l'on peut décomposer A∪B en trois parties disjointes :

A ∪ B = (A \ A ∩ B) ∪ (B \ A ∩ B) ∪ A ∩ B.

2) On doit montrer que f est injective et surjective. Commençons par l'injectivité.

On doit montrer que pour toutes parties A ∈ P(E) et A' ∈ P(E) telles que $I_A = I_{A'}$ on a $A = A'$.

Soient donc A ∈ P(E) et A'∈ P(E) telles que $I_A = I_{A'}$ Procédons par double inclusion.

Soit a ∈ A . On a alors $I_A(a) = 1$. Or $I_A(a) = I_B(a) = 1$

Donc : a ∈ A' par définition de $I_{A'}$.

Ainsi, $A \subseteq A'$. Par symétrie, on a aussi que $A' \subseteq A$. Conclusion : on a montré que pour toutes parties : A ∈ P(E) et A'∈ P(E) telles que : $I_A = I_{A'}$ on a $A = A'$ c'est-à-dire : f est injective.

Montrons que f est surjective.

Soit g ∈ F(E, {0, 1}). Posons A = {x ∈ E | g(x) = 1} ∈ P(E).

Montrons que : g = I_A = f(A).

Soit x ∈ E. Si x ∈ A , alors : $I_A(x) = 1 = g(x)$ par définition de A et de I_A .

Si x ∉ A , alors $I_A(x) = g(x)$) par définition de A et de I_A .

Conclusion : On a montré que pour tout g ∈ F(E, {0, 1}), il existe A ∈ P(E) telle que g= f(A)c'est-à-dire : f est surjective.

3) Soit C ∈ P(E). Montrons que A∆B = A∆C si, et seulement si : B = C.

A∆B = A∆C équivaut à : $I_{A\Delta B} = I_{A\Delta C}$

Car : $\begin{array}{l} f : P(E) \to \mathrm{F}(\mathrm{E},\ \{0,\ 1\}) \\ \qquad A \mapsto I_A \end{array}$ est injective

A∆B = A∆C équivaut à : $I_{A\Delta B} = I_{A\Delta C}$

De plus, par la question 1), on a :

$$I_{A\Delta B} = I_{(A\cup B)-(A\cap B)} = I_{A\cup B} - I_A \times I_B = I_A + I_B - 2I_A \times I_B = I_A{}^2 + I_B{}^2 - 2I_A \times I_B$$

Cette égalité vient du fait que I_A et I_B sont à valeurs dans {0, 1} et que $0^2 = 0$ et $1^1 = 1$.

Donc : $I_{A\Delta B} = (I_A - I_B)^2$

Ainsi, A∆B = A∆C équivaut à : $(I_A - I_B)^2 = (I_A - I_C)^2$

Attention : ceci n'est équivalent à $I_A - I_B = I_A - I_C$

que si les deux côtés de cette dernière égalité sont de même signe.

En fait, c'est toujours le cas.

En effet, si x ∈ A, alors $I_A(x) = 1$ et $I_A(x) - I_B(x) \geq 0$ car $I_B(x)$ ∈ {0, 1}, idem on a : $I_A(x) - I_C(x) \geq 0$

Si x ∉ A, alors $I_A(x) = 0$ et $I_A(x) - I_B(x) \leq 0$ car $I_B(x)$ ∈ {0, 1} et encore $I_A(x) - I_C(x) \leq 0$.

On a donc bien dans tous les cas : $I_A - I_B = I_A - I_C$ Ce qui équivaut à : $I_B = I_C$

et, comme f est injective, ceci équivaut à : B = C.

Exercice12 : Résoudre dans : $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'équation : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $f(x+y) = x + y^2$

$A(\mathbb{R};\mathbb{R})$: désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Solution : Soit : $S = \{ f \in A(\mathbb{R};\mathbb{R}) / \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; f(x;y) = x + y^2 \}$

On raisonne par double implication :

Soit : $f \in S \Rightarrow \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $f(x+y) = x + y^2$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$; $f(x+0) = x$ $(y = 0)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x$ $(y = 0) \Rightarrow f \in \{Id_{\mathbb{R}}\}$ Donc : $S \subset \{Id_{\mathbb{R}}\}$

Inversement : montrons que : $\{Id_{\mathbb{R}}\} \subset S$

Soit : $f \in \{Id_{\mathbb{R}}\} \Rightarrow f(x) = x$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Et Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ On a : $f(0+2) = 2 \neq 0 + 2^2 = 4$

Donc : $Id_{\mathbb{R}} \notin S$

Conclusion : $S = \varnothing$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien