1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°10 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

a) $A=\left\{a\in\mathbb{Z}/\frac{-7}{2}\le a^2\le\frac{8}{3}\right\}$ b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\right\}$ c) $C=\left\{(a;b)\in\mathbb{N}^2/a+2b=7\right\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble suivant : $E=\{1;4;9;16;...\}$

3)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Exercice2 : Soient les ensembles suivants : $E=\left\{\frac{5n+2}{3}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{\frac{2n-8}{6}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $-\frac{4}{3}\in F$ et $-\frac{4}{3}\notin E$

2) Montrer que : $E\subset F$

3) Est-ce qu'on a : $E=F$?

Exercice3 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Exercice4 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Simplifier les expressions suivantes : a) $A\cap(A\cup B)$

b) $\left[A\cup(A\cap B)\right]\cup B$, c) $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap B\right)$

Exercice5 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/|x+1|\le 3\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/|2x-a|\le 4\right\}$

1) Ecrire A en extension
2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $A\cap B=\varnothing$
3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N}\cap B=\varnothing$
4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $B\subset\mathbb{N}$

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\left]-2;+\infty\right[\to\left]-\infty;4\right[\\ x\mapsto\frac{4x}{x+2}\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

4) a) Vérifier que : $\forall x\in\left]-2;+\infty\right[\ f(x)=4-\frac{8}{x+2}$

b) Déterminer : $f\left(\left[0;+\infty\right[\right)$ et $f^{-1}\left(\left]-\infty;2\right[\right)$

Exercice7 : Soit f l'application : $\begin{array}{l}\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}$

1)Montrer que : f est injective

2)l'application g : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}$ est-elle injective ? justifier

Exercice8 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R})\subset\left]-1,1\right[$:

b) f est-elle surjective ?

c) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$; $f^{-1}(\{3\})$

2) Montrer que : $f^{-1}\left(\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right)=[0,1]$

3) Montrer que f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-1,1\right[$ et Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice9 :1) Montrer que : $\forall x\in[0;1]$; $0\leq\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 1$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l} f:[0;1]\rightarrow[0;1] \\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

Exercice10 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2 \\ (x;y)\mapsto(x+y\ ;\ xy) \end{array}$

1) a) f est-elle injective ?

b) f est-elle surjective ?

2) Soient les ensembles : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x\leq y\right\}$ et $F=\left\{(s;p)\in\mathbb{R}^2 / s^2-4p\geq 0\right\}$

Montrer que : $f(E)=F$

3) Soit g la restriction de f sur E

Montrer que g : est une bijection de E vers F et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien