1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°10 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

a) $A=\left\{a\in\mathbb{Z}/\frac{-7}{2}\le a^2\le\frac{8}{3}\right\}$ b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\right\}$ c) $C=\left\{(a;b)\in\mathbb{N}^2/a+2b=7\right\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble suivant : $E=\{1;4;9;16;...\}$

3)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Solution : 1) a) $A=\left\{a\in\mathbb{Z}/\frac{-7}{2}\le a^2\le\frac{8}{3}\right\}$

$A=\{-3;-2;-1;0;1;2\}$

b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-x+2\le 0\right\}$

$\Delta=(-1)^2-4\times2\times1=-7\prec 0$: le signe de x^2-x+2 :est celui de $a=1\succ 0$

C'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R}/x^2-x+2\succ 0$

Donc : $B=\varnothing$

c) $C=\left\{(a;b)\in\mathbb{N}^2/a+2b=7\right\}$

Soit : $(a;b)\in\mathbb{N}^2$

$$(a;b)\in H\Leftrightarrow(a;b)\in\mathbb{N}^2\ \ et\ \ a+2b=7$$
$$\Leftrightarrow(a;b)\in\mathbb{N}^2\ \ et\ \ 2b=7-a$$
$$\Rightarrow(a;b)\in\mathbb{N}^2\ \ et\ \ 2b\in\{0;2;4;6\}$$

$2b=0\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow a=7$

$2b=2\Leftrightarrow b=1\Leftrightarrow a=5$

$2b=4\Leftrightarrow b=2\Leftrightarrow a=3$

$2b=6\Leftrightarrow b=3\Leftrightarrow a=1$

Donc : $C\subset\{(1;3);(3;2);(5;1);(7;0)\}$

Inversement : $\{(1;3);(3;2);(5;1);(7;0)\}\subset C$

Donc : $C=\{(1;3);(3;2);(5;1);(7;0)\}$

Exercice2 : Soient les ensembles suivants : $E=\left\{\frac{5n+2}{3}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{\frac{2n-8}{6}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $-\frac{4}{3}\in F$ et $-\frac{4}{3}\notin E$

2) Montrer que : $E\subset F$

3) Est-ce qu'on a : $E=F$?

Solution :1) a) Montrons que : $-\frac{4}{3}\in F$

$-\frac{4}{3}\in F\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/-\frac{4}{3}=\frac{2n-8}{6}\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/-\frac{8}{3}=\frac{2n-8}{6}\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/-8=2n-8\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/0=2n$

$-\frac{4}{3}\in F\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/n=0$

Il suffit de prendre : $n=0$

On peut vérifier que : $\frac{2n-8}{6}=\frac{2\times0-8}{6}=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3}$

Par suite : $-\frac{4}{3}\in F$

a) Montrons que : $-\frac{4}{3}\notin E$

Supposons par l'absurde que : $-\frac{4}{3}\in E$

$-\frac{4}{3}\in E \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/-\frac{4}{3}=\frac{5n+2}{3} \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/5n+2=-4$

$\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/5n=-6 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/\boxed{n=-\frac{5}{6}\notin\mathbb{Z}}$

Contradiction : Donc : $-\frac{4}{3}\notin E$

2) Montrons que : $E\subset F$

Soit : $r\in E$ Montrons que : $r\in F$?

$r\in E \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}/r=\frac{5n+2}{3}$

Pour montrer que : $r\in F$ Il suffit de trouver un : $n'\in\mathbb{Z}$ tel que : $r=\frac{2n'-8}{6}$

$r=\frac{5n+2}{3}$ et $r=\frac{2n'-8}{6}$

Donc : $\frac{2n'-8}{6}=\frac{5n+2}{3}$

Donc : $\frac{2n'-8}{6}=\frac{10n+4}{6}$

Donc : $2n'-8=10n+4 \Leftrightarrow 2n'=10n+12 \Leftrightarrow n'=5n+6\in\mathbb{Z}$

Donc : Il suffit de prendre : $n'=5n+6\in\mathbb{Z}$

Par suite : $r\in F$

Conclusion : $E\subset F$

3) Comme : $-\frac{4}{3}\in F$ et $-\frac{4}{3}\notin E$ alors : $F\not\subset E$

Par suite : $E\neq F$

Exercice3 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Monter que : $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Solution : Démontrons la double implication.

$\Rightarrow$) On suppose que : $A\cap B=A\cap C$

- ✓ Soit $x\in A\cap\overline{B}$ montrons que $x\in A\cap\overline{C}$?

$x\in A\cap\overline{B} \Rightarrow x\in\overline{B}$ et $x\in A$

$\Rightarrow x\notin B$ et $x\in A$

$\Rightarrow x\notin A\cap B \quad \Rightarrow x\notin A\cap C$ et $x\in A$

$\Rightarrow x\notin C$ et $x\in A$

$\Rightarrow x\in A\cap\overline{C}$

Donc : on a prouvé l'inclusion : $A\cap\overline{B}\subset A\cap\overline{C} \quad (1)$

- ✓ Soit $x\in A\cap\overline{C}$ montrons que $x\in A\cap\overline{B}$?

$x \in A \cap \overline{C} \Rightarrow x \in \overline{C}$ et $x \in A$
$\Rightarrow x \notin C$ et $x \in A$
$\Rightarrow x \notin A \cap C \quad \Rightarrow x \notin A \cap B$ et $x \in A$
$\Rightarrow x \notin B$ et $x \in A$
$\Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$

Donc : on a prouvé l'inclusion : $A \cap \overline{C} \subset A \cap \overline{B} \quad (2)$

(1) et $(2) \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Par suite : $A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

$\Leftarrow$) On suppose que : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ montrons que $A \cap B = A \cap C$

D'après : l'implication $\Rightarrow$)

$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}}$
$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Par suite : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Conclusion : $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

Exercice4 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .
Simplifier les expressions suivantes :

a) $A \cap (A \cup B)$

b) $[A \cup (A \cap B)] \cup B$

c) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

Solution : Remarque : *<u>les propriétés suivantes sur les Opérations sur les ensembles :</u>*
<u>Sont à retenir</u>

1) Pour tout sous-ensemble A de E , A ∩ A = A, A ∩ E = A et A ∩∅ = ∅;.
2) Pour toutes parties A et B de E , A ∩ B = B ∩ A.
3) Pour toutes parties A,B,C de E : A ∩(B ∩C) = (A ∩ B)∩C (que l'on note A ∩ B ∩C).
4) Pour tout sous-ensemble A de E , A ∪ A = A, A ∪ E = E et A ∪∅ = A.
5) Pour toutes parties A et B de E , A ∪ B = B ∪ A.
6) Pour toutes parties A,B,C de E ,A ∪(B ∪C) = (A ∪ B)∪C (que l'on note A ∪ B ∪C).
7) Pour toutes parties A et B de E , A ∩ B ⊂ A ⊂ A ∪ B.
8) Si A,B et C sont trois parties de E : A ⊂ B ⇒ (A ∩C ⊂ B ∩C) et (A ∪C ⊂ B ∪C).
9) Soient A,B,C ∈ P (E). Alors : A ∩(B ∪C) = (A ∩ B)∪(A ∩C) et A ∪(B ∩C) = (A ∪ B)∩(A ∪C)
10) Pour toutes parties A,B de E , on a : A ∩(A ∪ B) = A et A ∪(A ∩ B) = A.
11) Pour tout ensemble E , $\overline{E}$ = ∅; et ; $\overline{\varnothing}$ = E .
12). ∀A ∈ P (E), $\overline{\overline{A}}$ = A.
13) ∀A,B ∈ P (E),A ⊂ B ⇔ $\overline{B} \subset \overline{A}$
14) Soient A et B deux parties de E . alors : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
15) Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F , noté E × F , est l'ensemble des couples (x , y), où x est un élément de E et y un élément de F .
E × F = {(x , y), x ∈ E , y ∈ F }.
ATTENTION ! L'ordre est fondamental ! Le couple (x ; y) n'est pas le couple (y ; x).
Lorsque E = F , le produit cartésien E × E est noté E^2 .

a) $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$ car $A \cap B \subset A$

b) $[A \cup (A \cap B)] \cup B = (A \cup B) \cup (A \cap B) = A \cup B$ car $A \cap B \subset A \cup B$

c) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap E = A$

Exercice5 : Soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$A=\{x\in\mathbb{Z}/|x+1|\leq 3\}$ et $B=\{x\in\mathbb{Z}/|2x-a|\leq 4\}$

1) Ecrire A en extension
2) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $A\cap B=\varnothing$
3) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N}\cap B=\varnothing$
4) Déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $B\subset\mathbb{N}$

Solution : 1) il est aisé de voir que : $A=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$

2) $B=\{x\in\mathbb{Z}/-4\leq 2x-a\leq 4\}=\{x\in\mathbb{Z}/2x-4\leq a\leq 2x+4\}$

Donc : $C_{\mathbb{Z}}^{B}=\{x\in\mathbb{Z}/2x-4\succ a\ \ ou\ \ a\succ 2x+4\}$

$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset C_{\mathbb{Z}}^{B}\Leftrightarrow\forall x\in A;x\in C_{\mathbb{Z}}^{B}$

$\Leftrightarrow\forall x\in A;\quad 2x-4\succ a\ \ ou\ \ a\succ 2x+4$

$\Leftrightarrow\forall x\in A\ ;\ a\in\left]-\infty;2x-4\right[\cup\left]2x+4;+\infty\right[\Leftrightarrow a\in\bigcap_{x\in A}\left(\left]-\infty;2x-4\right[\cup\left]2x+4;+\infty\right[\right)$

Puisque : $A=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$ on obtient : $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow a\in\left(\left]-\infty;2(-4)-4\right[\cup\left]2\times 2+4;+\infty\right[\right)$

$\Leftrightarrow a\in\left(\left]-\infty;-12\right[\cup\left]8;+\infty\right[\right)$

3)On a : $\overline{B}=\{x\in\mathbb{Z}/2x-4\succ a\ \ ou\ \ a\succ 2x+4\}$

Donc nous pouvons écrire : $\mathbb{N}\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\mathbb{N}\subset\overline{B}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{N}\ ;\ x\in\overline{B}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{N};a\in\left]-\infty;2x-4\right[\cup\left]2x+4;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow a\in\bigcap_{x\in\mathbb{N}}\left(\left]-\infty;2x-4\right[\cup\left]2x+4;+\infty\right[\right)\Leftrightarrow a\in\left]-\infty;-4\right[$

3)On a : $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/-2+\frac{a}{2}\leq x\leq 2+\frac{a}{2}\right\}$

Donc : $B\subset\mathbb{N}\Leftrightarrow B=\left(\forall x\in\left\{x\in\mathbb{Z}/-2+\frac{a}{2}\leq x\leq 2+\frac{a}{2}\right\}\right);x\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow -1\prec -2+\frac{a}{2}\Leftrightarrow -2\prec -4+a\Leftrightarrow 2\prec a$

Exercice6 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\left]-2;+\infty\right[\to\left]-\infty;4\right[\\ x\mapsto\dfrac{4x}{x+2}\end{array}$

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

4) a) Vérifier que : $\forall x\in\left]-2;+\infty\right[\ f(x)=4-\dfrac{8}{x+2}$

b) Déterminer : $f\left(\left[0;+\infty\right[\right)$ et $f^{-1}\left(\left]-\infty;2\right[\right)$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{4x}{x+2}$

Soient $x_1\in\left]-2;+\infty\right[$ et $x_2\in\left]-2;+\infty\right[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\dfrac{4x_1}{x_1+2}=\dfrac{4x_2}{x_2+2}\Rightarrow\dfrac{x_1}{x_1+2}=\dfrac{x_2}{x_2+2}\Rightarrow x_1(x_2+2)=x_2(x_1+2)$

$\Rightarrow x_2x_1+2x_1=x_1x_2+2x_2\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

2)Soient $y \in]-\infty;4[$

Résolvons dans $]-2;+\infty[$ l'équation : $f(x) = y$

Soit : $x \in]-2;+\infty[$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{4x}{x+2} = y \Leftrightarrow 4x = y(x+2)$ car $x \in]-2;+\infty[$ donc $x+2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 4x - xy = 2y \Leftrightarrow x(4-y) = 2y$ et $y \in]-\infty;4[$

Donc : $4 - y \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{2y}{4-y}$

Vérifions que : $x = \frac{2y}{4-y} \in]-2;+\infty[$???

$\frac{2y}{4-y} - (-2) = \frac{2y}{4-y} + 2 = \frac{2y - 2y + 8}{4-y} = \frac{8}{4-y} \succ 0$ Car $y \in]-\infty;4[$

Donc : $x = \frac{2y}{4-y} \in]-2;+\infty[$?

Donc $\forall y \in]-\infty;4[\; \exists x \in]-2;+\infty[\,/\, f(x) = y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

3) On a d'après les questions précédentes que l'application f est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application f est bijective.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]-2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) = \frac{2y}{4-y} \\ y \in]-\infty;4[\end{cases}$$

Donc : $\forall x \in]-\infty;4[$; $f^{-1}(x) = \frac{2x}{4-x}$ et $\begin{array}{l} f^{-1} :]-\infty;4[\to]-2;+\infty[\\ x \mapsto \frac{2x}{4-x} \end{array}$

4) a) Soit : $x \in]-2;+\infty[$

$$f(x) = \frac{4x}{x+2} = \frac{4x+8-8}{x+2} = \frac{4(x+2)}{x+2} - \frac{8}{x+2} = 4 - \frac{8}{x+2}$$

b) $f([0;+\infty[) = ?$

$f([0;+\infty[) = \{f(x) / x \in [0;+\infty[\}$

$x \in [0;+\infty[\Leftrightarrow x+2 \geq 2 \Leftrightarrow 0 \prec \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \prec \frac{8}{x+2} \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{8}{x+2} \geq -4 \Leftrightarrow 4 - \frac{8}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

$x \in [0;+\infty[\Leftrightarrow f(x) \in [0;+\infty[$

$f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$

$f^{-1}([2;11]) = ??$

$f^{-1}(]-\infty;2]) = \{x \in]-2;+\infty[\,/\, f(x) \in]-\infty;2]\}$

<u>Soit : $x \in]-2;+\infty[$</u> : $x \in f^{-1}(]-\infty;2]) \Leftrightarrow f(x) \leq 2 \Leftrightarrow 4 - \frac{8}{x+2} \leq 2$

$\Leftrightarrow -\frac{8}{x+2} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{8}{x+2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow 0 \prec x+2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \prec x \leq 2$

$x \in f^{-1}(]-\infty;2]) \Leftrightarrow x \in]-2;2[$

Donc : $f^{-1}(]-\infty;2]) =]-2;2[\cap]-2;+\infty[=]-2;2[$

Exercice7 : Soit f l'application : $\begin{array}{l} \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2-x+1} \end{array}$

1)Montrer que : f est injective

2)l'application g : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2-x+1} \end{array}$ est-elle injective ? justifier

Solution : Montrons que : f est injective : Soient $x_1 \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $x_2 \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Supposons que : $f(x_1) = f(x_2)$

Donc : $\sqrt{x_1^2-x_1+1} = \sqrt{x_2^2-x_2+1} \Rightarrow x_1^2 - x_1 + 1 = x_2^2 - x_2 + 1$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2) - (x_1-x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-1) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad ou \quad x_1 + x_2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad ou \quad x_1 + x_2 = 1$

Donc : $\sqrt{x_1^2-x_1+1} = \sqrt{x_2^2-x_2+1} \Rightarrow x_1 = x_2 \ ou \ x_1 + x_2 = 1$

Or : $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[\Rightarrow x_1 \succ \frac{1}{2} \ et \ x_2 \succ \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 \times x_2 \succ 1 \Rightarrow x_1 \times x_2 \neq 1$

Donc : $\frac{x_1}{x_1^2+x_1+1} = \frac{x_2}{x_2^2+x_2+1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Par suite : f est injective

2) Montrons que : g : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2-x+1} \end{array}$ n'est pas injective

On prend : $x_1 = 0 \ et \ x_2 = 1$: $g(0) = \sqrt{0^2-0+1} = 1$ et $g(1) = \sqrt{1^2-1+1} = 1$

On a donc : $0 \neq 2$ mais : $g(0) = g(1)$

Ceci signifie que l'application g n'est pas injective

Exercice8 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{array}$

1) a) Montrer que : $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$:

b) f est-elle surjective ?

c) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$; $f^{-1}(\{3\})$

2) Montrer que : $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$

3) Montrer que f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et Déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

1) a) Soit $x\in\mathbb{R}$: on a : $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+|x|}\right|=\frac{|x|}{|1+|x||}=\frac{|x|}{1+|x|}$ car $1+|x|\succ 0$

On a : $|x|\prec|x|+1$ car $|x|+1-|x|=1\succ 0$

Donc : $\frac{|x|}{1+|x|}\prec\frac{1+|x|}{1+|x|}$ c'est-à-dire : $|f(x)|\prec 1$:

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

C'est-à-dire : $f(\mathbb{R})\subset]-1,1[$

b) On a : $\forall x\in\mathbb{R}$: $-1\prec f(x)\prec 1$

Donc : par exemple 1 ou 2 n'admet pas d'antécédents

Donc f n'est pas surjective

c) Déterminons : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/f(x)=\frac{1}{2}\right\}$$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{1+|x|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-|x|-1=0$

Si : $x\geq 0$ $\quad 2x-|x|-1=0\Leftrightarrow 2x-x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Si : $x\prec 0$ $\quad 2x-|x|-1=0\Leftrightarrow 2x+x-1=0\Leftrightarrow 3x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ pas de solutions : car $x\prec 0$

Conclusion : $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1$

Par suite : $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\{1\}$

$f^{-1}(\{3\})=\varnothing$ Car $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\prec 1$ et $3\geq 1$

2) Montrons que : $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=[0,1]$

$$f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$x\in f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\Leftrightarrow 0\leq f(x)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\leq\frac{x}{1+|x|}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{1+|x|}{2}$ car : $1+|x|\succ 0$

$\Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{1+|x|}{2}\Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{1+x}{2}$ car $x\geq 0$ et donc : $|x|=x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq x\\ x\leq\frac{1+x}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq x\\ 2x\leq 1+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq x\\ x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1\Leftrightarrow x\in[0,1]$$

Alors : $x \in f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow x \in [0,1]$ et par suite : $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$

3) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$

Montrons que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Supposons : $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow \left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right| = \left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{|x_1|}{1+|x_1|} = \frac{|x_2|}{1+|x_2|} \Rightarrow |x_1|(1+|x_2|) = |x_2|(1+|x_1|)$$

$$\Rightarrow |x_1||x_2| + |x_1| = |x_1||x_2| + |x_2| \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

On remplace dans : $\frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_1|} \Rightarrow x_1 = x_2$

Donc f est injective

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

- On a : f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Donc : f est injective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Soit : $y \in]-1,1[$: Montrons que : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$?

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{|x|+1} = y$$

Utilisons un raisonnement par disjonction des cas :

Si : $y = 0$ alors $\frac{x}{|x|+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc : $\exists! x = 0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = 0$

Si : $y \in]0,1[$ alors $\frac{x}{|x|+1} = y \Rightarrow x \succ 0$

$$\frac{x}{|x|+1} = y \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = y \Leftrightarrow x = (x+1)y \Leftrightarrow x - xy = y \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$ car : $y =]0,1[$

Donc : Si : $y \in]0,1[$ alors $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Si : $y \in]-1,0[$ alors $-1 \prec y \prec 0$

Donc : $\frac{x}{|x|+1} = y \Rightarrow x \prec 0$

$$\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = (1-x)y \Leftrightarrow x = y - xy \Leftrightarrow x + xy = y \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$ car : $-1 \prec y \prec 0$

Donc : Si : $y \in]-1,0[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Conclusion : $\forall y \in]-1,1[$ $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

Par suite : f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$

Résumé : Si : $y \in [0,1[$ $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} = f^{-1}(y)$

Si : $y\in\left]-1,0\right[\quad f(x)=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y}{1+y}=f^{-1}(y)$

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $\begin{array}{l}\left]-1,1\right[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{y}{1-y} & si\quad x\in\left[0,1\right[\\ \dfrac{y}{1+y} & si\quad x\in\left]-1,0\right[\end{cases}\end{array}$

Exercice9 :1) Montrer que : $\forall x\in[0;1]\ ;0\le\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\le 1$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l}f:[0;1]\to[0;1]\\ x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in[0;1]\ ;0\le\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\le 1$

Soit : $x\in[0;1]$; On a : $0\le x\le 1\Rightarrow 0\le\sqrt{x}\le 1\ et\ 0\le\sqrt{1-x}\le 1$

Donc : $0\le\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ (1)

Montrons que : $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\le 1$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}-1=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}=\frac{-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\le 0$$

Donc : $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\le 1$

D'où d'après (1) et (2) on en déduit que : $0\le\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\le 1$

2)Soit l'application : $\begin{array}{l}f:[0;1]\to[0;1]\\ x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\end{array}$

Montrons que f est une bijection et déterminons sa bijection réciproque.

Soit $y\in[0;1]$;

Résolvons dans : $[0;1]$; l'équation : $f(x)=y$

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\times y$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}(1-y)=y\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}(1-y)\right)^2=\left(y\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x(1-y)^2=y^2(1-x)\Leftrightarrow x(1-y)^2+xy^2=y^2$$

$$\Leftrightarrow x\left((1-y)^2+y^2\right)=y^2\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{(1-y)^2+y^2}=\frac{y^2}{2y^2-2y+1}$$

Comme : $\frac{y^2}{2y^2-2y+1}\in[0;1]$

Ceci signifie que l'application f est bijective.

Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par : $$f^{-1}:[0;1]\to[0;1]$$ $$x\mapsto\frac{x^2}{2x^2-2x+1}$$

Exercice10: Soit l'application f : $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\mapsto(x+y\ ;\ xy)\end{array}$

1) a) f est-elle injective ?
b) f est-elle surjective ?
2) Soient les ensembles : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\le y\}$

Et $F=\{(s;p)\in\mathbb{R}^2\,/\,s^2-4p\ge 0\}$

Montrer que : $f(E)=F$

3) Soit g la restriction de f sur E

Montrer que g : est une bijection de E vers F et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

Solution : 1) Soit : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On remarque que : $f(x;y)=f(y;x)$

En effet : $f(x;y)=(x+y\ ;\ xy)=(y+x\ ;\ yx)=f(y;x)$

En particulier par exemple : $f(0;1)=(0+1\ ;0\times1)=(1+0\ ;1\times0)=f(0;1)$ mais $(1;0)\ne(0;1)$

Donc : f n'est pas injective
2) Soit : $(s;p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $\exists?(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Tel que : $f(x;y)=(s;p)$??

$f(x;y)=(s;p)\Leftrightarrow(x+y\ ;\ xy)=(s;p)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=s\\ xy=p\end{cases}$

$\Leftrightarrow(x;y)$ est solution de l'équation : $X^2-sX+p=0$
$\Leftrightarrow\Delta=s^2-4p\ge0$

Donc : si $\Delta=s^2-4p\prec0$ $f(x;y)=(s;p)$ n'a pas de solutions donc f n'est pas surjective

En particulier par exemple : $(s;p)=(1;1)$
$\Delta=1^2-4\times1=-3\prec0$
L'équation : $f(x;y)=(1;1)$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

Donc : $(1;1)\in\mathbb{R}^2$ et n'a pas d'antécédents par f

Donc : f n'est pas surjective
3) Soit g la restriction de f sur E
Montrons que g : est une bijection de E vers F et

Déterminons sa bijection réciproque g^{-1} :Soit : $(s;p)\in F$; $\exists?!(x;y)\in E$

Tel que : $g(x;y)=(s;p)$??

$g(x;y)=(s;p)\Leftrightarrow(x+y\ ;xy)=(s;p)$ et $s^2-4p\ge0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= s \\ xy = p \end{cases}$ et $s^2-4p\geq 0$

$Donc$: $(x;y)$ et $x\leq y$ est solution unique de l'équation : $X^2-sX+p=0$

Donc : g : est une bijection de E vers F

$X^2-sX+p=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}$ et $x=\dfrac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}$

$g(x;y)=(s;p) \Leftrightarrow (x;y)=g^{-1}(s;p)=\left(\dfrac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2};\dfrac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}\right)$

$g^{-1}:F\to E$

$(x;y)\mapsto\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2};\dfrac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}\right)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien