1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°1 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Vraie ou Faux
1) L'ensemble des multiples de 1 est : $\mathbb{N}^*$
2) L'ensemble des solutions de l'équation : $x^4 - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ est : $S = \{-1;1\}$
3) $\frac{3}{25} \in$ D : l'ensemble des nombres décimaux

Exercice2 : Ecrire en extension les ensembles suivants :
1) $D = \{n \in \mathbb{Z} / n/6\}$ 2) $A = \{n \in \mathbb{Z} / n+1 \geq n^2\}$
3) $B = \{x \in \mathbb{Q} / (x^2-3)(x^2-3x+2) = 0\}$ 4) $C = \left\{n \in \mathbb{Z} / \frac{17}{n^2+1} \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice3 : On considère les ensembles suivants : $E = \{1;2;3;4;5;6;....;20\}$
A et B deux parties de E tel que : $A = \{x \in E \ / \ x = 4k ; k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{x \in E \ / \ x = 3k ; k \in \mathbb{N}\}$
1) Ecrire en extension les ensembles A et B.
2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$; $C_E^{A\cap B}$; $C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^A \cap C_E^B$
3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A \cap C_E^B$
b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A \cup C_E^B$

Exercice4 : Vraie ou faux
1) $\left\{-\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right\} \subset$ D : l'ensemble des nombres décimaux 2) $\left\{\sqrt{2};\frac{1}{8};0\right\} \subset \mathbb{R}^*$
3) $\{-1;0;1\} \subset \left\{n \in \mathbb{Z} / \frac{2n}{|n|+1} \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice5 : $A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\}$ et B = {−2,−1,0,1}
Montrons que : $A = B$

Exercice6 : $A = \left\{x \in \mathbb{R} - \{-1\} / \frac{5x+1}{x+1} \prec 2\right\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| \prec 1\}$
Montrons que : $A \neq B$

Exercice7 : Soit $E = \{0;1;2\}$} déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

Exercice8 : Ecrire en extension les ensembles suivants : 1) $P(P(\varnothing))$ 2) $P(P(\{a;b\}))$

Exercice9 : Soient A ; B ; C trois parties d'un ensemble $E = \{1;2;3;4;5\}$ telles que :
$A \cup B = \{2;3;4;5\}$ et $A \cap B = \{2;4\}$ et $A \cap C = \{2;3\}$ et $A \cup C = \{1;2;3;4\}$
1) Déterminer : A ; B ; C
2) Déterminer : $A\Delta B$ et $B\Delta C$ et $C\Delta A$
Et vérifier que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Exercice10 : Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer que : 1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E .

Démontrer l'implication suivante : $\begin{cases} A\subset B \\ B\subset C \Rightarrow A=B=C \\ C\subset A \end{cases}$

Exercice12 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E
Monter que par contraposition les assertions suivantes :
1) $A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$
2) $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

Exercice13 : Soient les ensembles : $A=\left\{\frac{\pi}{4}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$ $B=\left\{\frac{\pi}{2}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$

Monter que : $A\cap B=\varnothing$

Exercice14 : Soient les ensembles : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-xy-2y^2=0\right\}$

$F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\right\}$

$H=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y^2-2y(x+1)+2x=0\right\}$

1) Montrer que : $F\subset E$
2) Déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?
3) Montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer
4) Soient les ensembles : $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\right\}$;

$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\right\}$

a) Montrer que : $H=A\cup B$ b) Déterminer : $H\cap F$

Exercice15 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:]1;+\infty[&\to]2;+\infty[\\ x &\mapsto \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$

Montrer que f est injective

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2-1 \end{aligned}$

g est-elle injective ?

Exercice17 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:]1;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+\sqrt{x^2-x} \end{aligned}$

Montrer que f est injective

Exercice18 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:]1;+\infty[&\to]2;+\infty[\\ x &\mapsto \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$

Montrer que f est surjective

Exercice19 : Soit l'application f : $\begin{aligned} :\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2+4x+1 \end{aligned}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\geq -3$
2) f est-elle surjective ?

Exercice20 : Soit l'application : $\begin{aligned} f:]2;+\infty[&\to]5;+\infty[\\ x &\mapsto \frac{5x}{x-2} \end{aligned}$

1) Montrer que f est injective 2) Montrer que f est surjective
3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Exercice21 : $E=\{1;2;3;4\}$;

1) Soit f l'application de l'ensemble $E=\{1;2;3;4\}$ dans l'ensemble $F=\{a;b;c;d\}$ définie par :

$f(1)=c$; $f(2)=a$; $f(3)=b$; $f(4)=b$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{2\}$; $A=\{2;3;4\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{b\}$; $B=\{a;b\}$; $B=\{d\}$

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{-1;1\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{2\}$; $B=\{1;3\}$

Exercice22 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x+1 \end{array}$ Déterminer $f^{-1}([2;3[)$

Exercice23 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+2 \end{array}$ et $A=[2;11]$ et $B=[-1;6]$

Déterminer :
1) L'image directe de A et B par f
2) L'image réciproque de A et B par f

Exercice24 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^4-2x^2 \end{array}$

1)a) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$

b) f est-elle injective ?

2)a) Déterminer $f(\mathbb{R})$

b) f est-elle surjective ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien