1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°1 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 : Vraie ou Faux

1) L'ensemble des multiples de 1 est : $\mathbb{N}^*$

2) L'ensemble des solutions de l'équation : $x^4-1=0$ dans $\mathbb{R}$ est : $S=\{-1;1\}$

3) $\frac{3}{25}\in$ D : l'ensemble des nombres décimaux

Solution : 1) n est un multiple de 1 signifie : $n=k\times 1$ avec $k\in\mathbb{N}$

On a : $0=0\times 1$ donc : 0 est un multiple de 1

Mais : $0\notin\mathbb{N}^*$ donc : faux

2) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation : $x^4-1=0$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $x\in S\Leftrightarrow x^4-1=0\Leftrightarrow\left(x^2\right)-1^2=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=0$

$x\in S \Leftrightarrow x^2-1=0 \quad ou \quad x^2+1=0$

$x\in S\Leftrightarrow x^2=1 \; ou\, x^2=-1$ or $x^2=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

$x\in S\Leftrightarrow x=1 \; ou\, x=-1\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$

Donc : $S=\{-1;1\}$ donc : vraie

3) $\frac{3}{25}=\frac{3\times 4}{25\times 4}=\frac{12}{100}=\frac{12}{10^2}\in D$: l'ensemble des nombres décimaux donc : vraie

Exercice2 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $D=\{n\in\mathbb{Z}/n/6\}$

2) $A=\{n\in\mathbb{Z}/n+1\geq n^2\}$

3) $B=\left\{x\in\mathbb{Q}/\left(x^2-3\right)\left(x^2-3x+2\right)=0\right\}$

4) $C=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{17}{n^2+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Solution : 1) $6=1\times 2\times 3$: $D_6=\{-1;1;2;-2;3;-3;-6;6\}$

Soit $n\in\mathbb{Z}$: $n\in D\Leftrightarrow n/6\Leftrightarrow n\in\{-1;1;2;-2;3;-3;-6;6\}$ Donc : $D=\{-1;1;2;-2;3;-3;-6;6\}$

2) $A=\{n\in\mathbb{Z}/n+1\geq n^2\}$

Soit $n\in\mathbb{Z}$: $n\in A\Leftrightarrow n+1\geq n^2\Leftrightarrow n^2-n\leq 1\Leftrightarrow 0\leq n^2-n\leq 1$

$n\in A\Leftrightarrow n^2-n=0\Leftrightarrow n(n-1)=0\Leftrightarrow n-1=0 \; ou \; n=0$

$n\in A\Leftrightarrow n=1 \; ou \; n=0\Leftrightarrow n\in\{0\,;1\}$

Donc : $A=\{0\,;1\}$

3) $B=\left\{x\in\mathbb{Q}/\left(x^2-3\right)\left(x^2-3x+2\right)=0\right\}$

Soit $x\in\mathbb{Q}$:

$x\in B\Leftrightarrow\left(x^2-3\right)\left(x^2-3x+2\right)=0$

$x\in B\Leftrightarrow x^2-3=0 \; ou \; x^2-3x+2=0$

$x\in B\Leftrightarrow x^2=3 \; ou \; x^2-2x-(x-2)=0$

$x\in B\Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \; ou \; x=\sqrt{3} \; ou \; (x-2)(x-1)=0$

Or $-\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

$x\in B\Leftrightarrow x-2=0 \; ou \; x+2=0$

$x \in B \Leftrightarrow x = 2 \ \ ou \ \ x = -2 \Leftrightarrow x \in \{-2\,;2\}$

Donc : $B = \{-2\,;2\}$

4) $C = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{17}{n^2+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$: $n \in C \Leftrightarrow \frac{17}{n^2+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n^2+1/17 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n^2+1 \in \{1;17\}$ Car : $n^2+1 \geq 0$

$n \in C \Leftrightarrow n^2+1 = 1 \ \ ou \ \ n^2+1 = 17$

$n \in C \Leftrightarrow n^2 = 0 \ \ ou \ \ n^2 = 16$

$n \in C \Leftrightarrow n = 0 \ \ ou \ \ n = -4 \ \ ou \ \ n = 4$

Donc : $C = \{-4\,;0;4\}$

Exercice3 : On considère les ensembles suivants : $E = \{1;2;3;4;5;6;....;20\}$

A et B deux parties de E tel que : $A = \{x \in E \ / \ x = 4k\,; k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{x \in E \ / \ x = 3k\,; k \in \mathbb{N}\}$

1) Ecrire en extension les ensembles A et B.

2)Déterminer les ensembles suivants : C_E^A ; C_E^B ; $C_E^{A\cup B}$; $C_E^{A\cap B}$; $C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^A \cap C_E^B$

3) Comparer : a) $C_E^{A\cup B}$ et $C_E^A \cap C_E^B$

b) $C_E^{A\cap B}$ et $C_E^A \cup C_E^B$

Solution : 1) $A = \{4;8;12;16;20\}$ et $B = \{3;6;9;12;15;18\}$

2) $C_E^A = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$

$C_E^A = \{1;2;3;5;6;7;9;10;11;13;14;15;17;18;19\}$

$C_E^B = \{x \in E \ / \ x \notin B\}$

$C_E^B = \{1;2;4;5;7;8;10;11;13;14;16;17;19;20\}$

$A \cap B = \{12\}$

$A \cup B = \{3;4;6;8;9;12;15;16;18;20\}$

$C_E^{A\cup B} = \{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

$C_E^{A\cap B} = E - \{12\} = \{1;2;3;4;11;13....;20\}$

$C_E^A \cap C_E^B = \{1;2;5;7;10;11;13;14;17;19\}$

$C_E^A \cup C_E^B = \{1;2;3;4;11;13....;20\}$

3) On remarque que :

a) $C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B$ b) $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

Exercice4 : Vraie ou faux

1) $\left\{-\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right\} \subset$ D : l'ensemble des nombres décimaux

2) $\left\{\sqrt{2};\frac{1}{8};0\right\} \subset \mathbb{R}^*$

3) $\{-1;0;1\} \subset \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{2n}{|n|+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

Solution : 1) il faut montrer que : $-\frac{1}{5} \in D$ et $\frac{1}{2} \in D$ Or : $-\frac{1}{5} = -\frac{2}{10} = -\frac{2}{10^1} \in D$ et $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{5}{10^1} \in D$

Par suite : $\left\{-\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right\}\subset D$ donc : **vraie**

2) $\left\{\sqrt{2};\frac{1}{8};0\right\}\subset\mathbb{R}^*$??

On a : $\sqrt{2}\in\mathbb{R}^*$ et $\frac{1}{8}\in\mathbb{R}^*$ mais : $0\notin\mathbb{R}^*$ Par suite : $\left\{\sqrt{2};\frac{1}{8};0\right\}\not\subset\mathbb{R}^*$ donc : **faux**

3) $\{-1;0;1\}\subset\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{2n}{|n|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$? On pose : $A=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{2n}{|n|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

On a : $-1\in\mathbb{Z}$ et $\frac{2(-1)}{|-1|+1}=\frac{-2}{2}=-1\in\mathbb{Z}$ donc : $-1\in A$

Et On a : $0\in\mathbb{Z}$ et $\frac{2\times0}{|0|+1}=\frac{0}{1}=0\in\mathbb{Z}$ donc : $0\in A$

Et on a : $1\in\mathbb{Z}$ et $\frac{2\times1}{|1|+1}=\frac{2}{2}=1\in\mathbb{Z}$ donc : $1\in A$

Donc : $\forall n\in\{-1;0;1\}\Rightarrow n\in A$

Donc : $\{-1;0;1\}\subset\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{2n}{|n|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$ **vraie**

Exercice5 : $A=\{k\in\mathbb{Z}/|2k+1|\leq3\}$ et B = {−2,−1,0,1}

Montrons que : A = B

Solution : Conseils méthodologiques :

Pour montrer que E = F, on montre que :E ⊂ F et que F ⊂ E.

Soit $k\in\mathbb{Z}$

$k\in A\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|2k+1|\leq3\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $-3\leq2k+1\leq3\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $-4\leq2k\leq2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-2\leq k\leq1\Leftrightarrow k\in\{-2;-1;0;1\}\Leftrightarrow k\in B$

Donc on a : $k\in A\Leftrightarrow k\in B$

Donc : A = B

Exercice6 : $A=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-1\}/\frac{5x+1}{x+1}\prec2\right\}$ et $B=\{x\in\mathbb{R}/|x|\prec1\}$

Montrons que : $A\neq B$

Solution : a) On va écrire l'ensemble A en extension

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $x\in A\Leftrightarrow\frac{5x+1}{x+1}\prec2\Leftrightarrow\frac{5x+1}{x+1}-2\prec0\Leftrightarrow\frac{3x-1}{x+1}\prec0$

$3x-1=0\Leftrightarrow3x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{3x-1}{x+1}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

$x\in A \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \prec 0 \Leftrightarrow \left]-1;\frac{1}{3}\right[$

Donc : $A=\left]-1;\frac{1}{3}\right[$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$: $x\in B \Leftrightarrow |x|\prec 1 \Leftrightarrow -1\prec x\prec 1 \Leftrightarrow x\in\left]-1;1\right[$

Donc : $A=\left]-1;1\right[$

Donc : $A\neq B$

Remarque : on peut sans écrire l'ensemble A en extension

Remarquer que : $\frac{1}{2}\in B$ car $\left|\frac{1}{2}\right|\prec 1$ Mais : $\frac{1}{2}\notin A$ car : $\frac{5\times\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{7}{3}\geq 2$ Donc : $A\neq B$

Exercice7 : Soit $E=\{0;1;2\}$} déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

Solution : $P(E)=\{\varnothing;\{0\};\{1\};\{2\};\{0;1\};\{0;2\};\{1;2\};E\}$

Exercice8 : Ecrire en extension les ensembles suivants : 1) $P(P(\varnothing))$ 2) $P(P(\{a;b\}))$

Solution : 1) Il est aisé de voire que $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$

Donc : $P(P(\varnothing))=\{\varnothing;\{\varnothing\}\}$

2) $P(P(\{a;b\}))$:

$P(\{a;b\})=\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{a;b\}\}$

$P\left(P(\{a;b\})\right)=\{\varnothing;\{\varnothing\};\{\{a\}\};\{\{b\}\};\{\{a;b\}\};\{\varnothing;\{a\}\};\ ;\{\varnothing;\{b\}\};\{\varnothing;\{a;b\}\};\{\{a\};\{b\}\};\{\{a\};\{a;b\}\};$

$\{\{b\};\{a;b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{a;b\}\};\{\varnothing;\{b\};\{a;b\}\}\}\ \{\{b\};\{a;b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{a;b\}\};\{\varnothing;\{b\};\{a;b\}\}$

$;\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{a;b\}\}\}$

Exercice9 : Soient A ; B ; C trois parties d'un ensemble $E=\{1;2;3;4;5\}$ telles que :

$A\cup B=\{2;3;4;5\}$ et $A\cap B=\{2;4\}$et $A\cap C=\{2;3\}$ et $A\cup C=\{1;2;3;4\}$

1) Déterminer : A ; B ; C

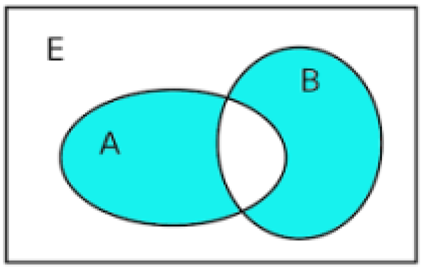
2) Déterminer : $A\Delta B$ et $B\Delta C$ et $C\Delta A$

Et vérifier que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Solution :**1)** $A=\{2;3;4\}$; $B=\{2;4;5\}$; $C=\{1;2;3\}$

2) $A\Delta B= =(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$A\Delta B=\{3;5\}$ et $B\Delta C=\{1;3;4;5\}$



$C\Delta A=\{1;4\}$

$(A\Delta B)\Delta C=\{3;5\}\Delta\{1;2;3\}=\{1;2;5\}$

$A\Delta(B\Delta C)=\{2;3;4\}\Delta\{1;3;4;5\}=\{1;2;5\}$

Donc : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

Exercice10 : Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer que : 1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Solution :1) Il s'agit de résultats du cours que l'on peut utiliser sans démonstration mais cet exercice demande de les redémontrer.
Si $x\in A\cup(B\cap C)$ Alors ($x\in A$ ou $x\in(B\cap C)$)
Alors ($x\in A$ ou ($x\in B$ et $x\in C$))
Si $x\in A$ alors $x\in A\cup B$ et $x\in A\cup C$,
Par conséquent $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
Si ($x\in B$ et $x\in C$) alors ($x\in A\cup B$ et $x\in A\cup C$)
Donc si ($x\in A$ ou ($x\in B$ et $x\in C$))
Alors ($x\in A\cup B$ et $x\in A\cup C$)
On a montré que $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$
Si $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ alors ($x\in A\cup B$ et $x\in A\cup C$). ($x\in A\cup B$ et $x\in A\cup C$)
$\Leftrightarrow$ (($x\in A$ ou $x\in B$) et ($x\in A$ ou $x\in C$))
Si ($x\in A$ et ($x\in A$ ou $x\in C$))
Alors $x\in A\cap A$ ou $x\in A\cap C$
Si ($x\in B$ et ($x\in A$ ou $x\in C$))
Alors $x\in B\cap A$ ou $x\in B\cap C$
Alors $x\in A$ ou $x\in A\cap C$ ou $x\in B\cap A$ ou $x\in B\cap C$ Alors $x\in A$ ou $x\in A\cap C\subset A$ ou $x\in B\cap A\subset A$ ou $x\in B\cap C$
Alors $x\in A$ ou $x\in B\cap C$
Alors $x\in A\cup(B\cap C)$
On a montré que $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$ Finalement $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
2) Si $x\in A\cap(B\cup C)$ Alors ($x\in A$ et $x\in B\cup C$)
Alors ($x\in A$ et ($x\in B$ ou $x\in C$))
Alors ($x\in A$ et $x\in B$) ou ($x\in A$ et $x\in C$)
Alors $x\in A\cap B$ ou $x\in A\cap C$
Alors $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$
On a montré que $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Si $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ Alors $x\in A\cap B$ ou $x\in A\cap C$ Alors ($x\in A$ et $x\in B$) ou ($x\in A$ et $x\in C$)
Alors ($x\in A$ ou $x\in A$) et ($x\in A$ ou $x\in C$) et
($x\in B$ ou $x\in A$) et ($x\in B$ ou $x\in C$)
Alors $x\in A$ et $x\in A\cup C$ et $x\in B\cup A$ et $x\in B\cup C$ Comme $x\in A$ et $x\in A\cup C$ et $x\in B\cup A$
Entraine que $x\in A$
$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow x\in A$ et $x\in B\cup C\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$
On a montré que $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$
Et finalement $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E.

Démontrer l'implication suivante : $\begin{cases}A\subset B\\ B\subset C\\ C\subset A\end{cases}\Rightarrow A=B=C$

Solution : On suppose que : $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \\ C \subset A \end{cases}$ Montrons que : $A = B = C$?

On a : $A \subset B$ et $B \subset C$ alors : $A \subset C$
On a : $C \subset A$ et $A \subset C$ alors : $A = C$
On a : $B \subset C$ et $C \subset A$ alors : $B \subset A$
On a : $A \subset B$ et $B \subset A$ alors : $A = B$
On a : $A = B$ et $A = C$ alors : $A = B = C$

Exercice12 : Soient A ; B et C des parties d'un ensemble non vide E
Monter que par contraposition les assertions suivantes :
1) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$
2) $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$

Solution : 1) Montrons que : $A \neq B \Rightarrow A \cap B \neq A \cup B$
On suppose que : $A \neq B$
Alors : $\exists x \in A - B$ ou $\exists x \in B - A$
1ér cas : $\exists x \in A - B$
$x \in A - B \Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$
$\Rightarrow x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$
$\Rightarrow A \cup B \neq A \cap B$
2ér cas : $\exists x \in B - A$
$x \in B - A \Rightarrow x \in B$ et $x \notin A$
$\Rightarrow x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$
$\Rightarrow A \cup B \neq A \cap B$
Donc : $A \neq B \Rightarrow A \cap B \neq A \cup B$
Par contraposition on déduit que :
$A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$
2) Montrons que : $B \neq C \Rightarrow A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$
On suppose que : $B \neq C$
Alors : $\exists x \in B - C$ ou $\exists x \in C - B$
1ér cas : $\exists x \in B - C \Rightarrow x \in B$ et $x \notin C$
Si $x \in A$ alors : $x \in A \cap B$ et $x \notin A \cap C$
$\Rightarrow A \cap B \neq A \cap C$
Si $x \notin A$ alors : $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cup C$
$\Rightarrow A \cup B \neq A \cup C$
Donc : $B \neq C \Rightarrow A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$
Par contraposition on déduit que :
$A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$

Exercice13 : Soient les ensembles : $A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\quad B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Monter que : $A \cap B = \varnothing$

Solution : On suppose que : $A \cap B \neq \varnothing$
Donc : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ et $x_0 \in B$

$\Leftrightarrow \exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2 :$ $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5}$ et $x_0 = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc $\Leftrightarrow \exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc : $\frac{2}{5}(k_1 - k_2) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k_1 - k_2 = -\frac{5}{8}$ contradiction avec la faite que $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{8} \notin \mathbb{Z}$ Donc :
$A \cap B = \varnothing$

Exercice14 : Soient les ensembles : $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-xy-2y^2=0\}$

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

$H=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y^2-2y(x+1)+2x=0\}$

1) Montrer que : $F\subset E$

2) Déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?

3) Montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles : $A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\}$;

$B=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\}$

a) Montrer que : $H=A\cup B$

b) Déterminer : $H\cap F$

Solution : 1) Montrons que : $F\subset E$?

On a : $(x;y)\in F \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$

$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=y^2+y^2-2y^2=0 \Rightarrow (x;y)\in E$

Donc : $F\subset E$

2) $(1;y)\in E \Leftrightarrow 1-y-2y^2=0 \Leftrightarrow (1+y)(1-2y)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ ou $y=\frac{1}{2}$

Donc : $\left(1;\frac{1}{2}\right)\in E$ ou $\left(1;\frac{1}{2}\right)\notin F$

Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2 / (x;y)\notin F$ et $(x;y)\in E$

Donc : $E\not\subset F$

3) $(x;y)\in E \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x^2-2xy+xy-2y^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow x+y=0$ ou $x-2y=0$

$\Leftrightarrow (x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Avec : $G=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x-2y=0\}$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ $(x;y)\in E \Leftrightarrow (x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Donc : $E=F\cup G$

4) a) $(x;y)\in H \Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^2+2x=0 \Leftrightarrow [y-(x+1)]^2=(x+1)^2-2x \Leftrightarrow [y-(x+1)]^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow y=x+1+\sqrt{x^2+1}$ ou $\Leftrightarrow y=x+1-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x;y)\in A$ ou $(x;y)\in B$

Donc : $H=A\cup B$

4) b) $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in H$ ou $(x;y)\in F$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+2x-2y=0$ et $x=-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x^2+2x+2x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+4)=0 \\ x=-y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ ou \ x=-\dfrac{4}{3} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \ x=0 \ et \ y=0$ ou $x=-\dfrac{4}{3} \ et \ y=\dfrac{4}{3}$

Donc : $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{(0;0);\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)\right\}$

$H\cap F=\left\{(0;0);\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)\right\}$

Exercice15 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]2;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{2x}{x-1}\end{array}$

Montrer que f est injective

Solution : $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Soient $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{2x_1}{x_1-1}=\dfrac{2x_2}{x_2-1}$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_1-1}=\dfrac{x_2}{x_2-1}\Rightarrow x_1(x_2-1)=x_2(x_1-1)$

$\Rightarrow x_2x_1-x_1=x_1x_2-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2$

$\Rightarrow x_1=x_2$

Exercice16 : Soit l'application : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2-1\end{array}$

g est-elle injective ?

Solution : On a : $g(1)=g(-1)=0$ mais $1\neq-1$

Donc : g n'est pas injective

Exercice17 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x+\sqrt{x^2-x}\end{array}$

Montrer que f est injective

Solution : Soient $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\sqrt{x_1^2-x_1}=x_2+\sqrt{x_2^2-x_2}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2-x_1}-\sqrt{x_2^2-x_2}=x_2-x_1$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1^2-x_1}-\sqrt{x_2^2-x_2}\right)^2=(x_2-x_1)^2$

$\Rightarrow x_1^2-x_1-2\sqrt{x_2^2-x_2}\sqrt{x_1^2-x_1}+x_2^2-x_2=x_2^2-2x_1x_2+x_2^2$

$\Rightarrow -x_1-x_2-2\sqrt{x_2^2-x_2}\sqrt{x_1^2-x_1}+2x_1x_2=0$

$\Rightarrow -x_1+x_1x_2-2\sqrt{x_2^2-x_2}\sqrt{x_1^2-x_1}-x_2+x_1x_2=0$

$\Rightarrow x_1(x_2-1)-2\sqrt{x_1(x_1-1)}\sqrt{x_2(x_2-1)}+x_2(x_1-1)=0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1(x_2-1)}\right)^2-2\sqrt{x_1(x_1-1)}\sqrt{x_2(x_2-1)}+\left(\sqrt{x_2(x_1-1)}\right)^2=0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1(x_2-1)}-\sqrt{x_2(x_1-1)}\right)^2=0\Rightarrow \sqrt{x_1(x_2-1)}-\sqrt{x_2(x_1-1)}=0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1(x_2-1)} = \sqrt{x_2(x_1-1)} \Rightarrow x_1(x_2-1) = x_2(x_1-1)$

$\Rightarrow x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$ ou $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ Ceci signifie que l'application f est injective.

Exercice18 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f :]1;+\infty[\to]2;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{2x}{x-1} \end{array}$

Montrer que f est surjective

Solution : $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$: Soient $y \in]2;+\infty[$

Résolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1} = y \Leftrightarrow 2x = y(x-1)$ car $x \in]1;+\infty[$ donc : $x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x - xy = -y \quad \Leftrightarrow x(2-y) = -y$

$y \in]2;+\infty[$ donc $2-y \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-y}{2-y} = \dfrac{y}{y-2}$

Vérifions que : $x = \dfrac{y}{y-2} \in]1;+\infty[$???

$\dfrac{y}{y-2} - 1 = \dfrac{y-y+2}{y-2} = \dfrac{2}{y-2} \succ 0$ car $y \in]2;+\infty[$

Donc : $x = \dfrac{y}{y-2} \in]1;+\infty[$

Donc $\forall y \in]2;+\infty[\;\; \exists x \in]1;+\infty[\,/\, f(x) = y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

Exercice19 : Soit l'application f : $\begin{array}{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 4x + 1 \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -3$

2) f est-elle surjective ?

Solution : 1) soit $x \in \mathbb{R}$; Montrons que : $f(x) \geq -3$

$f(x) - (-3) = x^2 + 4x + 1 + 3 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq -3$

2)Par exemple : - 4 n'a pas d'antécédents par f

C'est-à-dire : l'équation : $f(x) = -4$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : f n'est pas surjective

Exercice20 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f :]2;+\infty[\to]5;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{5x}{x-2} \end{array}$

1) Montrer que f est injective

2) Montrer que f est surjective

3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque. f^{-1}

Solution : 1) $f(x) = \dfrac{5x}{x-2}$

Soient $x_1 \in]2;+\infty[$ et $x_2 \in]2;+\infty[$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{5x_1}{x_1-2}=\frac{5x_2}{x_2-2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1-2}=\frac{x_2}{x_2-2} \Rightarrow x_1(x_2-2)=x_2(x_1-2)$

$\Rightarrow x_2x_1-2x_1=x_1x_2-2x_2 \Rightarrow -2x_1=-2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

Ceci signifie que l'application f est injective.

2)Soient $y \in]5;+\infty[$

Résolvons dans $]2;+\infty[$ l'équation : $f(x) = y$

Soit : $x \in]2;+\infty[$

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{5x}{x-2}=y \Leftrightarrow 5x=y(x-2)$ car $x \in]2;+\infty[$ donc $x-2\neq 0$

$\Leftrightarrow 5x-xy=-2y \quad \Leftrightarrow x(5-y)=-2y$

$y \in]5;+\infty[$ Donc $5-y\neq 0 \quad \Leftrightarrow x=\frac{-2y}{5-y}=\frac{2y}{y-5}$

Vérifions que : $x=\frac{2y}{y-5} \in]2;+\infty[$???

$\frac{2y}{y-5}-2=\frac{2y-2y+10}{y-5}=\frac{10}{y-5}\succ 0$ Car $y \in]5;+\infty[$

Donc : $x=\frac{2y}{y-5} \in]2;+\infty[$

Donc $\forall y \in]5;+\infty[\ \exists x \in]2;+\infty[\,/\, f(x)=y$

Ceci signifie que l'application f est surjective.

3) On a d'après les questions précédentes que l'application f est injective et surjective, ceci signifie d'après un théorème que l'application f est bijective.

$\begin{cases} f(x)=y \\ x \in]2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y)=\frac{2y}{y-5} \\ y \in]5;+\infty[\end{cases}$ Donc : $\forall x \in]5;+\infty[$; $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-5}$

$f^{-1}:]5;+\infty[\to]2;+\infty[$

$\qquad x \mapsto f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-5}$

Exercice21 : $E=\{1;2;3;4\}$;

1) Soit f l'application de l'ensemble $E=\{1;2;3;4\}$ dans l'ensemble $F=\{a;b;c;d\}$ définie par :

$f(1)=c$; $f(2)=a$; $f(3)=b$; $f(4)=b$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{2\}$; $A=\{2;3;4\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{b\}$; $B=\{a;b\}$; $B=\{d\}$

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2$

a) Déterminer $f(A)$ lorsque : $A=\{-1;1\}$

b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque : $B=\{2\}$; $B=\{1;3\}$

Solution : a) Déterminons $f(A)$: $f(A)=\{f(x)/x\in A\}$

$f(A)=f(\{2\})=\{a\}$

$f(A)=f(\{2;3;4\})=\{a;b\}$

b) $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$

$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{b\})=\{3;4\}$

$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{a;b\})=\{2;3;4\}$

$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{d\})=\varnothing$

2) $f(x)=x^2$

a) $f(A)=f(\{-1;1\})=\{1\}$ car $f(-1)=f(1)=1$

b) $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in B\}$

$x\in f^{-1}(\{2\})\Leftrightarrow f(x)=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\ ou\ \ x=\sqrt{2}$

$f^{-1}(\{2\})=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

$x\in f^{-1}(\{1;3\})\Leftrightarrow f(x)\in\{1;3\}\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\ ou\ \ x=\sqrt{2}$

$x^2=3\Leftrightarrow x=-\sqrt{3}\ ou\ \ x=\sqrt{3}$

$x^2=1\Leftrightarrow x=-1\,ou\ \ x=1$

$f^{-1}(f^{-1}(\{1;3\}))=\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\}$

Exercice22: Soit l'application : $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x+1\end{matrix}$ Déterminer $f^{-1}([2;3[)$

Solution : Soit : $x\in\mathbb{R}$

$x\in f^{-1}([2;3[)\Leftrightarrow f(x)\in[2;3[\Leftrightarrow 2\le f(x)\prec 3\quad\Leftrightarrow 2\le 2x+1\le 3$

$\Leftrightarrow 1\le 2x\prec 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le 2x\prec 1\quad\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2};1\right[$

D'où : $f^{-1}([2;3[)=\left[\frac{1}{2};1\right[$

Exercice23: Soit l'application f : $\begin{matrix} :\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+2\end{matrix}$ et $A=[2;11]$ et $B=[-1;6]$

Déterminer :

1) L'image directe de A et B par f

2) L'image réciproque de A et B par f

Solution : 1) a) $x\in A\Leftrightarrow 2\le x\le 11\Leftrightarrow 2^2\le x^2\le 11^2$

$\Leftrightarrow 2^2+2\le x^2+2\le 11^2+2\Leftrightarrow 6\le x^2+2\le 123\Leftrightarrow 6\le f(x)\le 123\Leftrightarrow f(x)\in[6;123]$

Donc : $x\in A\Leftrightarrow f(x)\in[6;123]$

Ainsi : $f(A)=[6;123]$

b) $B=[-1;6]$ Or : $B=[-1;6]=[-1;0]\cup[0;6]$

$x\in B\Leftrightarrow -1\le x\le 0\ \ ou\ 0\le x\le 6\Leftrightarrow 0\le x^2\le 1\ ou\ 0\le x^2\le 36$

$\Leftrightarrow 2\le x^2+2\le 3\ ou\ 2\le x^2+2\le 38\Leftrightarrow 2\le x^2+2\le 38\Leftrightarrow f(x)\in[2;38]$

Donc : $x\in B\Leftrightarrow f(x)\in[2;38]$

Ainsi : $f(B)=[2;38]$

2) a) $f^{-1}([2;11])=?$

$f^{-1}([2;11])\Leftrightarrow f(x)\in[2;11]$

$x\in f^{-1}([2;11])\Leftrightarrow 2\le x^2+2\le 11\quad\Leftrightarrow 0\le x^2\le 9\Leftrightarrow 0\le\sqrt{x^2}\le\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow 0 \le |x| \le 3 \quad \Leftrightarrow x \in [-3;3]$

Ainsi : $f^{-1}([2;11]) = [-3;3]$

b) $f^{-1}([-1;6]) = ?$; $f^{-1}([-1;6]) \Leftrightarrow f(x) \in [-1;6]$

$x \in f^{-1}([-1;6]) \Leftrightarrow -1 \le x^2 + 2 \le 6 \quad \Leftrightarrow -3 \le x^2 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x^2} \le \sqrt{4}$

$\Leftrightarrow 0 \le |x| \le 2 \quad \Leftrightarrow x \in [-2;2]$

Ainsi : $f^{-1}([-1;6]) = [-2;2]$

Exercice24 : Soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 - 2x^2 \end{array}$

1)a) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$

b) f est-elle injective ?

2)a) Déterminer $f(\mathbb{R})$

b) f est-elle surjective ?

Solution :1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \ x = -\sqrt{2} \quad ou \quad x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

Donc : $f^{-1}(\{0\}) = \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

b) f n'est pas injective car :

On a : $f(0) = f(\sqrt{2}) = 0$ mais $0 \ne \sqrt{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ On a : $f(x) \le 3$

Donc par exemple l'équation : $f(x) = 4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : f est non surjective

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} / -1 \le f(x) \le 4\} = \{x \in \mathbb{R} / -1 \le x^2 \le 4\} = \{x \in \mathbb{R} / 0 \le x^2 \le 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / -2 \le x \le 2\} = [-2;2]$

Donc : $f^{-1}(B) = [-2;2]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien